第一章
线性规划与单纯形法

内容提要

一、线性规划的实际模型

1. 规划问题数学模型三个要素

(1) 决策变量

(2) 目标函数

(3) 约束条件

2. 线性规划问题的数学模型

(1)一般形式

目标函数：$\max(\text{或}\ \min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

约束条件：$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为决策变量，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为工艺系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为资源系数，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为价值系数。

(2)标准型式(也称规范形式)

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

二、线性规划的求解方法

1. 图解法

(1)优缺点：

① 图解法:图解法简单直观,求解线性规划问题时不需将数学模型化为标准型,可以直接在平面上作图,但此法只适用于二维问题,故有一定局限性。

②用图解法求解,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。它可以直接看出线性规划问题解的几种情况：

1° 有惟一最优解；

2° 有无穷多组最优解；

3° 无可行解；

4° 无有限最优解(即为无界解)。

(2)图解法的步骤：

① 建立平面直角坐标系；

② 图示约束条件,找出可行域；

③ 图示目标函数,即为一条直线；

④ 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移直至目标函数。

2. 单纯形法

(1)单纯形法原理

①基本思想:从可行域中的某个基本可行解开始到另一个基本可行解,直到目标函数达到最优。

②理论基础：

定理 1 若 LP 问题可行域存在,则可行域是个凸集。

定理 2 LP 问题的基可行解与可行域的顶点一一对应。

定理 3 若 LP 问题存在最优解,则一定存在一个基可行解是最优解。

(2) 单纯形法的步骤及解法

① 找出初始可行基,确定初始基本可行解,建立初始单纯形表。

②检验此基本可行解是否为最优解.即检验各非基变量 x_j 的检验数 σ_j,若所有 $\sigma_j \leqslant 0(j=m+1,\cdots,n)$则已经得到最优解,计算停止;否则转下一步。

③在 $\sigma_j>0(j=m+1,\cdots,n)$中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $P_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{mk})^{\mathrm{T}}\leqslant 0$,则此问题为无界解,停止计算;否则转下一步。

④ 根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$,确定非基变量 x_k 为换入变量;再根据 θ 法则

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\,|\,a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

确定基变量 x_l 为换出变量。

⑤ 实施枢轴运算,即以 a_{lk} 为主元素进行枢轴运算(亦即进行矩阵的行变换),使 P_k 变换为第 l 行的元素为 1,其余的元素为 0;并将 X_B 列中的 x_l 换为 x_k,从而得新的单纯形表;重复②～⑤,直到终止。

3. **两阶段法、大 M 法以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题**

(1)两阶段法

① 原理：此方法是将加入人工变量后的线性规划问题分成两个阶段来求解。

第一阶段：其目的是为原问题求初始基本可行解。为此，对于求极大化(或极小化)的线性规划问题，建立一个新的人工变量的目标函数——人工变量的系数均为－1 或(＋1)，对新的问题：

$$\max w = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

或

$$\min w = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ \qquad\cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 & \end{cases}$$

用单纯形法求解. 若 $w=0$，即所有的人工变量都变换为非基变量，说明原问题已得到了初始基本可行解；反之，若目标函数 w 的值为负(或为正)，则人工变量中至少有一个为正，这表示原问题无可行解，应停止计算。

第二阶段：将第一阶段求得的基本可行解对原问题的目标函数进行优化，即将目标函数换成原目标函数，以第一阶段得到的最终单纯形表除去人工变量的列后作为第二阶段计算的初始表，继续用单纯形法以求得问题的最优解。

② 计算方法：单纯形法。

(2)大 M 法

① 原理：人工变量在目标函数中的系数确定：若目标函数为 $\max z$，则系数为 $-M$；否则为 M。

② 计算方法：单纯形法。

三、了解线性规划的解及其几何意义

1. 可行解：凡满足线性规划约束条件的解称为可行解。
2. 最优解：使目标函数达到最大的可行解称为最优解。
3. 基：设 A 是约束方程组 m×n 维系数矩阵，其秩为 m，B 是矩阵 A 中 m×n 阶非奇异子矩阵，则称 B 是线性规划问题的一个基。
4. 解的几何意义：

(1)若线性规划问题有可行解，其所有可行解构成的区域称为可行域，则此可行域

$$D = \{X \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m; x_j \geqslant 0\}$$

必是一个凸集。

(2)线性规划问题的基本可行解与可行域 D 的顶点一一对应。

(3)如果线性规划问题有有限的最优解，则其目标函数的最优值一定可以在可行域的顶点上达到。

典型例题与解题技巧

【例 1】 市场对Ⅰ、Ⅱ两种产品的需求量为：产品Ⅰ在 1～4 月每月需 10 000 件，5～9 月每月 30 000 件，10～12 月为每月 150000 件；产品Ⅱ在 3～9 月每月 15 000 件，其他月每月 50 000 件。某厂生产这两种产品成本为：产品Ⅰ在 1～5 月内生产每件 5 元，6～12月内生产每件 4.50 元；产品Ⅱ在 1～5 月内生产每件 8 元，6～12 月内生产每件 7 元。该厂每月生产两种产品能力总和应不超过 120 000 件。产品Ⅰ容积每件 0.2m^3，产品Ⅱ每件 0.4m^3，而该厂仓库容积为 $15\ 000\text{m}^3$，要求：(a)说明上述问题无可行解；(b)若该厂仓库不足时，可从外厂租借。若占用本厂每月每 m^3 库容需 1 元，而租用外厂仓库时上述费用增加为 1.5 元，试问在满足市场需求情况下，该厂应如何安排生产，使总的生产加库存费用为最少(建立模型，不需求解)。

解题分析 要建立线性规划的数学模型，需从三个方面进行考虑：第一，决策变量是什么；第二，要达到什么样的目标，即目标函数的表达式；第三，如果要达到目标，受哪些条件约束。此题属供求问题，供求问题需从供应和需求入手。

解题过程 (a) 因 10～12 月份需求总计 450 000 件，这三个月最多只能生产 360 000 件，故需 10 月初有 90 000 件的库存，超过该厂最大仓库容积，故按上述条件，本题无解；

(b) 考虑到生产成本、库存费用和生产能力，该厂 10～12 月份需求的不足只需在 7～9 月份生产出来留用即可，故设

x_i——第 i 个月生产的产品Ⅰ数量，

y_i——第 i 个月生产的产品Ⅱ数量，

z_i, w_i 分别为第 i 个月末产品Ⅰ、Ⅱ库存数，

s_{1i}, s_{2i}分别为用于第$(i+1)$个月库存的原有及租借的仓库容积(m^3)。则可建立如下模型

$$\min z = \sum_{j=7}^{12}(4.5x_i + 7y_i) + \sum_{i=7}^{11}(s_{1i} + 1.5s_{2i})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_7 - 30\ 000 = z_7 & y_7 - 15\ 000 = w_7 \\ x_8 + z_7 - 30\ 000 = z_8 & y_8 + w_7 - 15\ 000 = w_8 \\ x_9 + z_8 - 30\ 000 = z_9 & y_9 + w_8 - 15\ 000 = w_8 \\ x_{10} + z_9 - 100\ 000 = z_{10} & y_{10} + w_9 - 50\ 000 = w_{10} \\ x_{11} + z_{10} - 100\ 000 = z_{11} & y_{11} + w_{10} - 50\ 000 = w_{11} \\ x_{12} + z_{11} = 100\ 000 & y_{12} + w_{11} = 50\ 000 \\ x_i + y_i \leqslant 120\ 000 & (7 \leqslant i \leqslant 12) \\ 0.2z_i + 0.4w_i = s_{1i} + s_{2i} & (7 \leqslant i \leqslant 11) \\ s_{1i} \leqslant 15\ 000 & (7 \leqslant i \leqslant 12) \\ x_i, y_i, z_i, w_i, s_{1i}, s_{2i} \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2】 $\max z=2x_1+4x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+\ \ x_2\leqslant 6\\ x_1+2x_2\leqslant 8\\ x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解题分析　题目中只有两个变量，故可用单纯形方法求解外还可用图解法求解。而图解法比单纯形法简单直观，故用图解法求解。

解题过程　图解法求解：

① 建立平面直角坐标系，确定决策变量的可行域。如图 1－1(a)所示，区域 $0ABCD$ 为可行域。

图 1-1(a)

图 1-1(b)

② 画出目标函数等值线，确定优化方向。

目标函数为 $z=2x_1+4x_2$ 是斜率为 $-1/2$，在纵轴上的截距为 $z/4$ 的平行直线族。若取 z 为一确定的值，如令 $z=0$，则得一条等值线 $0=2x_1+4x_2$，即 $x_2=-x_1/2$；如令 $z=12$，则得另一条等值线 $12=2x_1+4x_2$，即

$x_2=-x_1/2+3$，如图 1-1(b)所示。容易看出，沿着目标函数的法线方向向右上方平行移动，是它等值线的优化方向。

③ 确定最优解。

在可行域 $0ABCD$ 中找令 z 值达到最大的点。由图 1-1(b)容易看出，当等值

线平移到 C 点时，如果继续向上移，就离开了可行域，而且此时等值线的最佳位置与可行域边界 CB 重合。因此 C 点、B 点以及线段 CB 上所有的点，都是使目标函数值达到最大值的点，是最优解。

求得 C 点 $\boldsymbol{X}_C=(2,3)^{\mathrm{T}}$ 与 B 点 $\boldsymbol{X}_B=(4,2)^{\mathrm{T}}$，此时求得 $\max z=16$。目标函数 $z=2x_1+4x_2$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_C+(1-a)\boldsymbol{X}_B, 0\leqslant a\leqslant 1$。

历年考研真题评析

【题】 (2005年华南理工大学)设某种动物每天至少需要700克蛋白质、30克矿物质、100毫克维生素。现有5种饲料可供选择，每种饲料每公斤营养成份的含量及单价如下表所示：

试建立既满足动物生长需要，又使费用最省的选用饲料方案的线性规划模型。

表 1-1

饲料	蛋白质(克)	矿物质(克)	维生素(毫克)	价格(元/公斤)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

解题分析 这是一道较简单的数学规划模型问题，根据题意写出约束即可。

解题过程 $\min z=0.2x_1+0.7x_2+0.4x_3+0.3x_4+0.8x_5$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+6x_4+18x_5\geqslant 700\\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5\geqslant 30\\ 0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5\geqslant 100\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

课后习题全解

◯ 1.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

(1) $\max z=x_1+3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\ x_1+x_2\geqslant 1\\ x_2\leqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=x_1+1.5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=2x_1+2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\ 3x_1-x_2\leqslant -3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1) 图1-2中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+3x_2$，即 x_2

$=-\frac{1}{3}x_1+\frac{z}{3}$是斜率为$-\frac{1}{3}$的一族平行线，易知 $x_1=3, x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得，将直线 $x_1+3x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向上平移，直至 A 点，A 点坐标为(2,4)。

图 1－2

所以
$$\max z=2+3\times4=14$$
此线性规划问题有惟一最优解。

(2) 图 1－3 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=x_1+1.5x_2$，即 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}z$ 是斜率为$-\frac{2}{3}$的一族平行线，易知 $x_1=3, x_2=0$ 为可行解，由线性规划的性质知，其最值在可行域的顶点取得。

将直线 $x_1+1.5x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向下平移，直至 B 点，B 点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

所以
$$\min z=\frac{3}{2}+1.5\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$
此线性规划问题有惟一最优解。

图 1－3

(3) 图 1－4 中阴影部分为线性规划问题的可行域，目标函数 $z=2x_1+2x_2$，即 $x_2=-x_1+\frac{z}{2}$ 是斜率为－1 的一族平行线，易知 $x_1=0, x_2=0$ 为可行解。在将直线 $2x_1+2x_2=0$ 沿 A 其法线方向逐渐向上平移的过程中发现：目标函数的值可以增加到无穷大。故此线性规划问题为无界解。

图 1－4

图 1－5

（4）如图 1－5 所示，此问题的可行域为空集，故此线性规划问题无可行解。

◎1.2 将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

（1）$\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\ x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

（2）$\max s=z_k/p_k$

$$\begin{cases}z_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}\\ \sum\limits_{k=1}^{m}-x_{ik}=-1 & (i=1,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0 & (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

分析 本题考查了线性规划问题的标准形式和初始单纯形表。

解 （1）将此线性规划问题化为标准型。

令 $x_4=x_5-x_6,z'=-z$

其中 $x_5,x_6\geqslant 0$

所以 $$\max z'=-\min(-z')=-\min z$$

则得到标准型为

$$\max z'=3x_1-4x_2+2x_3-5(x_5-x_6)+0\cdot x_7+0\cdot x_8-Mx_9-Mx_{10}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}-4x_1+x_2-2x_3+x_5-x_6+x_{10}=2\\ x_1+x_2+3x_3-x_5+x_6+x_7=14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_5-2x_6-x_8+x_9=2\\ x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\geqslant 0\end{cases}
$$

其中 M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1－2。

表 1－2

$c_j\to$			3	－4	2	－5	5	0	0	$-M$	$-M$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$-M$	x_{10}	2	－4	1	－2	1	－1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	－1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	－2	[3]	－1	2	－2	0	－1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	

（2）在上述问题的约束条件中加入人工变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得

$$
\max s=\frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}-Mx_1-Mx_2-\cdots-Mx_n
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}x_i+\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}=1 \quad (i=1,2,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0,x_i\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)\end{cases}
$$

其中 M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1－3。

表 1－3

c_j			$-M$	$-M$	$\cdots$	$-M$	$\frac{a_{11}}{p_k}$	$\frac{a_{12}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}$	$\frac{a_{n2}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{nm}}{p_k}$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1m}	$\cdots$	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nm}	
$-M$	x_1	1	1	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$-M$	x_2	1	0	1	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$-M$	x_n	1	0	0	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	
$-s$		nM	0	0	$\cdots$	0	$\frac{a_{11}}{p_k}+M$	$\frac{a_{12}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}+M$	$\frac{a_{n2}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{nm}}{p_k}+M$	

◎1.3 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解，指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8\\ x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

分析 本题考查了线性规划问题的基本解的计算。

解 (1)在第二个约束条件两边同时乘以-1，则第二个约束条件转化为

$$-x_1+2x_2-6x_3+7x_4=3$$

从而，x_1 的系数列向量 $P_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $P_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $P_3=\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $P_4=\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$。

① 因为 P_1、P_2 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4\\ -x_1+2x_2=3+6x_3-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\end{cases}$

从而得到一个基本可行解

$$X^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},z_1=2\times 1+3\times 2=8$$

② 因为 P_1、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4\\ -x_1-6x_3=3-2x_2-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{45}{13}\\ x_3=-\dfrac{14}{13}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(2)}=(\frac{45}{13},0,-\frac{14}{13},0)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3=-\dfrac{14}{13}<0$，所以该解是非可行解。

③ 因为 P_1、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8-3x_2+x_3\\ -x_1+7x_4=3-2x_2+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_3=0$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{34}{5}\\ x_4=\dfrac{7}{5}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(3)}=(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5})^{\mathrm{T}},z_3=2\times\frac{34}{5}+7\times\frac{7}{5}=\frac{117}{5}$$

④ 因为 P_2、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}3x_2-x_3=8-2x_1+4x_4\\ 2x_2-6x_3=3+x_1-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_4=0$，得$\begin{cases}x_2=\dfrac{45}{16}\\ x_3=\dfrac{7}{16}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(4)}=(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0)^{\mathrm{T}},z_4=3\times\frac{45}{16}+4\times\frac{7}{16}=\frac{163}{16}$$

⑤ 因为 P_2、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}3x_2-4x_4=8-2x_1+x_3\\ 2x_2+7x_4=3+x_1+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_3=0$，得$\begin{cases}x_2=\dfrac{68}{29}\\ x_4=-\dfrac{7}{29}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(5)}=(0,\frac{68}{29},0,-\frac{7}{29})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_4=-\frac{7}{29}<0$，所以该解是非可行解。

⑥ 因为 P_3、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}-x_3-4x_4=8-2x_1-3x_2\\ -6x_3+7x_4=3+x_1-2x_2\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，得$\begin{cases}x_3=-\dfrac{68}{31}\\ x_4=-\dfrac{45}{31}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(6)}=(0,0,-\frac{68}{31},-\frac{45}{31})^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3=-\frac{68}{31}<0,x_4=-\frac{45}{31}<0$，所以该解是非可行解。

比较 z_1,z_3,z_4，可知 $z_3=\frac{117}{5}$ 为最大值，故最优解为 $X^*=X^{(3)}=(\frac{34}{5},0,0,$

$\frac{7}{5})^{T}$，目标函数最优值为 $z^{*}=\frac{117}{5}$。

(2)易知，x_1 的系数列向量 $P_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$x_2$ 的系数列向量 $P_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$x_3$ 的系数列向量 $P_3=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，$x_4$ 的系数列向量 $P_4=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$

① 因为 P_1、P_2 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+2x_2=7-3x_3-4x_4\\2x_1+x_2=3-x_3-2x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}\\x_2=\frac{11}{3}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(1)}=(-\frac{1}{3},\frac{11}{3},0,0)^{T}$$

因为 $x_1=-\frac{1}{3}<0$，所以该解是非可行解。

② 因为 P_1、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+3x_3=7-2x_2-4x_4\\2x_1+x_3=3-x_2-2x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，得$\begin{cases}x_1=\frac{2}{5}\\x_3=\frac{11}{5}\end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(2)}=(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0)^{T},z_2=5\times\frac{2}{5}+3\times\frac{11}{5}=\frac{43}{5}$$

③ 因为 P_1、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases}x_1+4x_4=7-2x_2-3x_3\\2x_1+2x_4=3-x_2-x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_3=0$，得$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}\\x_4=\frac{11}{6}\end{cases}$

从而得到一个基本解

$$X^{(3)}=(-\frac{1}{3},0,0,\frac{11}{6})^{T}$$

因为 $x_1=-\frac{1}{3}<0$，所以该解是非可行解。

④ 因为 P_2、P_3 线性独立，故有

$$\begin{cases} 2x_2+3x_3=7-x_1-4x_4 \\ x_2+x_3=3-2x_1-2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_4=0$，得$\begin{cases} x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(4)}=(0,2,1,0)^{\mathrm{T}},z_4=-2\times 2+3\times 1=-1$$

⑤ 因为 P_2、P_4 线性相关，故 x_2，x_4 不能构成基变量。

⑥ 因为 P_3、P_4 线性独立，故有

$$\begin{cases} 3x_3+4x_4=7-x_1-2x_2 \\ x_3+2x_4=3-2x_1-x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，得$\begin{cases} x_3=1 \\ x_4=1 \end{cases}$

从而得到一个基可行解

$$X^{(6)}=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},z_6=3\times 1+(-6)\times 1=-3$$

比较 z_2，z_4，z_6，可知 $z_2=\frac{43}{5}$为最大值，故最优解为 $X^*=X^{(2)}=(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值为 $z^*=\frac{43}{5}$。

●1.4 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上哪一个顶点。

(1) $\max z=2x_1+x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 3x_1+5x_2\leqslant 15 \\ 6x_1+2x_2\leqslant 24 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z=2x_1+5x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2\leqslant 12 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 18 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

图 1－6

分析　对单纯形表的每次迭代要认真计算。

解 (1)解 1:图解法。

图 1—3 中的阴影区域为可行域,可见目标函数 $z=2x_1+x_2$ 在点 A_2 处达到最大,求解方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2=15\\6x_1+2x_2=24\end{cases}$ 可知 A_2 的坐标为$(\frac{15}{4},\frac{3}{4})$,所以 $X^*=(\frac{15}{4},\frac{3}{4})^{\mathrm{T}}$,

$z^*=2\times\frac{15}{4}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4}$

解 2:单纯形法。

在上述问题的约束条件中分别加入松弛变量 x_3,x_4,得该线性规划问题的标准型

$$\max\ z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3 \quad\quad =15\\6x_1+2x_2 \quad\quad +x_4=24\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代,计算结果如下表所示。

表 1—4

c_j			2	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	24	[6]	2	0	1	4
c_j-z_j			2	1	0	0	
0	x_3	3	0	[4]	1	−1/2	3/4
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	12
c_j-z_j			0	1/3	0	−1/3	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	−1/8	
2	x_1	15/4	1	0	−1/12	5/24	
c_j-z_j			0	0	−1/12	−7/24	

单纯形表的计算结果表明:$X^*=(\frac{15}{4},\frac{3}{4},0,0)^{\mathrm{T}}$,$z^*=2\times\frac{15}{4}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4}$

单纯形表迭代的第一步得 $X^{(0)}=(0,0,15,24)^{\mathrm{T}}$,表示图中原点(0,0)。

单纯形表迭代的第二步得 $X^{(1)}=(4,0,3,0)^{\mathrm{T}}$,表示图中 A_1 点。

单纯形表迭代的第三步得 $X^{(2)}=(\frac{15}{4},\frac{3}{4},0,0)^{\mathrm{T}}$,表示图中 A_2 点。

(2)解 1:图解法。

图 1—7 中的阴影区域为可行域,可见目标函数 $z=2x_1+5x_2$ 在点 A_3 处达到最大,求解方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2=18\\2x_2=12\end{cases}$ 可知 A_3 的坐标为(2,6)

所以 $$X^*=(2,6)^{\mathrm{T}},z^*=2\times2+5\times6=34$$

解 2:单纯形法。

在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_3,x_4,x_5,得该线性规划问题的标准型

图 1—7

$$\max z=2x_1+5x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_3=4\\2x_2+x_4=12\\3x_1+2x_2+x_5=18\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1—5 所示。

表 1—5

c_j			2	5	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	—
0	x_4	12	0	[2]	0	1	0	6
0	x_5	18	3	2	0	0	1	9
c_j-z_j			2	5	0	0	0	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	4
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	—
0	x_5	6	[3]	0	0	−1	1	2
c_j-z_j			2	0	0	−5/2	0	
0	x_3	2	0	0	1	1/3	−1/3	
5	x_2	6	0	1	0	1/2	0	
2	x_1	2	1	0	0	−1/3	1/3	
c_j-z_j			0	0	0	−11/6	−2/3	

单纯形表的计算结果表明：$X^*=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$z^*=2\times2+5\times6=34$

单纯形表迭代的第一步得 $X^{(0)}=(0,0,4,12,18)^{\mathrm{T}}$，表示图中原点(0,0)。

单纯形表迭代的第二步得 $X^{(1)}=(0,6,4,0,6)^{\mathrm{T}}$，表示图中 A_4 点。

单纯形表迭代的第三步得 $X^{(2)}=(2,6,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，表示图中 A_3 点。

小结 单纯形法是求解线性规划问题最有效的方法之一，要求熟练掌握。

○ **1.5** 以 1.4 题(1)为例，具体说明当目标函数中变量的系数怎样改变时，使满足约束条件的可行域的每一个顶点，都有可能使目标函数值达到最优。

解 由目标函数 $\max z=c_1x_1+c_2x_2$ 可得：$x_2=-\dfrac{c_1}{c_2}x_1+\dfrac{z}{c_2}=kx_1+\dfrac{z}{c_2}$，其中 $k=-\dfrac{c_1}{c_2}$

(1) 当 $k>0$ 时，若 $c_2>0$，则目标函数在 A_3 点(0,3)取得最大值；若 $c_2<0$，则目标函

数在 A_1 点(4,0)取得最大值。

(2) 当 $-\frac{3}{5}<k<0$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_3 点(0,3)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

(3) 当 $-3<k<-\frac{3}{5}$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_2 点(15/4,3/4)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

(4) 当 $k<-3$ 时,若 $c_2>0$,则目标函数在 A_1 点(4,0)取得最大值;若 $c_2<0$,则目标函数在原点(0,0)取得最大值。

●1.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下述线性规划问题,并指出属哪一类解。

(1) $\max z=2x_1+3x_2-5x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3\geqslant 10 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3\geqslant 8 \\ 3x_1+2x_2\geqslant 6 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max z=10x_1+15x_2+12x_3$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3\leqslant 9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3\leqslant 15 \\ 2x_1+x_2+x_3\geqslant 5 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max z=2x_1-x_2+2x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3\geqslant 6 \\ -2x_1+x_3\geqslant 2 \\ 2x_2-x_3\geqslant 0 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

分析 本题考查了单纯形法中的大 M 法,两阶段法以及解的类型的概念。

解 (1)解 1:大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中加上人工变量 x_4,x_6,减去剩余变量 x_5,得

$\max z=2x_1+3x_2-5x_3-Mx_4+0x_5-Mx_6$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1-6:

表 1—6

c_j			2	3	-5	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-M$	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
$-M$	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
c_j-z_j			$3M+2$	$3-4M$	$2M-5$	0	$-M$	0	
$-M$	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
2	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
c_j-z_j			0	$3M/2+8$	$M/2-6$	0	$M/2+1$	$-3M/2-1$	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
c_j-z_j			0	0	$-50/7$	$-M-16/7$	$-1/7$	$-M+1/7$	

由单纯形表的计算结果得：

最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{45}{7}+3\times\frac{4}{7}=\frac{102}{7}$。

解 2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中加入人工变量 x_4，x_6，减去剩余变量 x_5，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_4+x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ 2x_1-5x_2+x_3-x_5+x_6=10 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1—7：

表 1—7

c_j			0	0	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
1	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
c_j-z_j			-3	4	-2	0	1	0	
1	x_4	2	0	[7/2]	1/2	1	1/2	$-1/2$	4/7
0	x_1	5	1	$-5/2$	1/2	0	$-1/2$	1/2	—
c_j-z_j			0	$-7/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	3/2	
0	x_2	4/7	0	1	1/7	2/7	1/7	$-1/7$	
0	x_1	45/7	1	0	6/7	5/7	$-1/7$	1/7	
c_j-z_j			0	0	0	1	0	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_4=x_6=0$，所以$(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^T$ 是原线性规划问题的基可行解。

于是可以进行第二阶段运算，将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表1—8。

表1—8

c_j			2	3	−5	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	
3	x_2	4/7	0	1	1/7	1/7	
2	x_1	45/7	1	0	6/7	−1/7	
c_j-z_j			0	0	−50/7	−1/7	

由表中计算可知，原线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{45}{7},\frac{4}{7},0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{45}{7}+3\times\frac{4}{7}=\frac{102}{7}$。

(2)解1：大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中减去剩余变量 x_4,x_5，再分别加上人工变量 x_6,x_7，得

$$\min z=2x_1+3x_2+x_3+0x_4+0x_5+Mx_6+Mx_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-x_4 \quad +x_6 \quad =8 \\ 3x_1+2x_2 \quad -x_5 \quad +x_7=6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表1—9：

表1—9

c_j			2	3	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_6	8	1	[4]	2	−1	0	1	0	2
M	x_7	6	3	2	0	0	−1	0	1	3
c_j-z_j			$2-4M$	$3-6M$	$1-2M$	M	M	0	0	
3	x_2	2	1/4	1	1/2	−1/4	0	1/4	0	8
M	x_7	2	[5/2]	0	−1	1/2	−1	−1/2	1	4/5
c_j-z_j			$\frac{5}{4}-\frac{5}{2}M$	0	$M-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}M$	M	$\frac{3}{2}M-\frac{3}{4}$	0	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	−3/10	1/10	3/10	−1/10	
2	x_1	4/5	1	0	−2/5	1/5	−2/5	−1/5	2/5	
c_j-z_j			0	0	0	1/2	1/2	$M-1/2$	$M-1/2$	

由单纯形表的计算结果得：最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{4}{5}+3\times\frac{9}{5}=7$。$X$ 存在非基变量检验数 $\sigma_3=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

解2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中减去剩余变量 x_4,x_5，再分别加上人工变量 x_6,x_7，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_6+x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-x_4 \quad +x_6 \quad =8 \\ 3x_1+2x_2 \quad -x_5 \quad +x_7=6 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表 1—10：

表 1—10

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	8	1	[4]	2	−1	0	1	0	2
1	x_7	6	3	2	0	0	−1	0	1	3
c_j-z_j			−4	−6	−2	1	1	0	0	
0	x_2	2	1/4	1	1/2	−1/4	0	1/4	0	8
1	x_7	2	[5/2]	0	−1	1/2	−1	−1/2	1	4/5
c_j-z_j			−5/2	0	1	−1/2	1	3/2	0	
0	x_2	9/5	0	1	3/5	−3/10	1/10	3/10	−1/10	
0	x_1	4/5	1	0	−2/5	1/5	−2/5	−1/5	2/5	
c_j-z_j			0	0	0	0	0	1	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_6=x_7=0$，所以$(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表 1—11。

表 1—11

c_j			2	3	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	−3/10	1/10	
2	x_1	4/5	1	0	−2/5	1/5	−2/5	
c_j-z_j			0	0	0	1/2	1/2	

由表中计算可知，原线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $z^*=2\times\frac{4}{5}+3\times\frac{9}{5}=7$ 由于存在非基变量检验数 $\sigma_3=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

(3)解 1：大 M 法。

在上述线性规划问题的第一、二个约束条件中分别加上松弛变量 x_4,x_5，在第三个约束条件中减去剩余变量 x_6，再加上人工变量 x_7，得

$$\max z=10x_1+15x_2+12x_3+0x_4+0x_5+0x_6-Mx_7$$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+\quad x_3+x_4 \qquad\qquad =9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3 \qquad +x_5 \qquad =15 \\ 2x_1+\quad x_2+\quad x_3 \qquad\qquad -x_6+x_7=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1—12：

表 1—12

c_j			10	15	12	0	0	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	9/5
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0	0	—
$-M$	x_7	5	2	1	1	0	0	-1	1	5/2
c_j-z_j			$10+2M$	$15+M$	$12+M$	0	0	$-M$	0	
10	x_1	9/5	1	3/5	1/5	1/5	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	3/2
$-M$	x_7	7/5	0	$-1/5$	3/5	$-2/5$	0	-1	1	7/3
c_j-z_j			0	$9-\frac{M}{5}$	$10+\frac{3M}{5}$	$-2-\frac{2M}{5}$	0	$-M$	0	
10	x_1	3/2	1	39/80	0	3/16	$-1/80$	0	0	
12	x_3	3/2	0	9/16	1	1/16	1/16	0	0	
$-M$	x_7	1/2	0	$-43/80$	0	$-7/16$	$-3/80$	-1	1	
c_j-z_j			0	$\frac{27}{8}-\frac{43M}{80}$	0	$-\frac{21}{8}-\frac{7M}{16}$	$-\frac{5}{8}-\frac{3M}{80}$	$-M$	0	

由单纯形表的最终表可以看出，所有非基变量检验数 $\sigma_j<0$，且存在人工变量 $x_7=\frac{1}{2}$，故原线性规划问题无可行解。

解 2：两阶段法。

在上述线性规划问题的第一、二个约束条件中分别加上松弛变量 x_4，x_5，在第三个约束条件中减去剩余变量 x_6，再加上人工变量 x_7，得第一阶段的数学模型：

$$\min\ w=x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+3x_2+\quad x_3+x_4 \qquad\qquad =9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3 \qquad +x_5 \qquad =15 \\ 2x_1+\quad x_2+\quad x_3- \qquad\qquad x_6+x_7=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1—13：

表 1—13

c_j			0	0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	9	[5]	3	1	1	0	0	0	9/5
0	x_5	15	-5	6	15	0	1	0	0	—

c_j			0	0	0	0	0	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_7	5	2	1	1	0	0	−1	1	5/2
c_j-z_j			−2	−1	−1	0	0	1	0	
0	x_1	9/5	1	3/5	1/5	1/5	0	0	0	9
0	x_5	24	0	9	[16]	1	1	0	0	3/2
1	x_7	7/5	0	−1/5	3/5	−2/5	0	−1	1	7/3
c_j-z_j			0	−1/5	3/5	−2/5	0	1	0	
0	x_1	3/2	1	39/80	0	3/16	−1/80	0	0	
0	x_3	3/2	0	9/16	1	1/16	1/16	0	0	
1	x_7	1/2	0	−43/80	0	−7/16	−3/80	1	0	
c_j-z_j			0	43/80	0	7/16	3/80	1	0	

第一阶段求得最优解 $X^*=(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2},0,0,0,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$。因人工变量 $x_7=\frac{1}{2}\neq 0$，且非基变量检验数 $\sigma_j>0$，所以原线性规划问题无可行解。

(4)解 1：大 M 法。

在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量 x_4,x_6,x_8，再加上人工变量 x_5,x_7,x_9，得

$$\max z=2x_1-x_2+2x_3+0x_4-Mx_5+0x_6-Mx_7+0x_8-Mx_9$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6 \\ -2x_1+x_3-x_6+x_7=2 \\ 2x_2-x_3-x_8+x_9=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表表 1－14：

表 1－14

c_j			2	−1	2	0	−M	0	−M	0	−M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
$-M$	x_5	6	1	1	1	−1	1	0	0	0	0	6
$-M$	x_7	2	−2	0	1	0	0	−1	1	0	0	—
$-M$	x_9	0	0	[2]	−1	0	0	0	0	−1	1	0
c_j-z_j			$2-M$	$3M-1$	$2+M$	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	0	
$-M$	x_5	6	1	0	3/2	−1	1	0	0	1/2	−1/2	4
$-M$	x_7	2	−2	0	[1]	0	0	−1	1	0	0	2
−1	x_2	0	0	1	−1/2	0	0	0	0	−1/2	1/2	—
c_j-z_j			$2-M$	0	$\frac{5M}{2}+\frac{3}{2}$	$-M$	0	$-M$	0	$\frac{M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{3M}{2}$	
$-M$	x_5	3	[4]	0	0	−1	1	3/2	−3/2	1/2	−1/2	3/4

c_j			2	-1	2	0	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
2	x_3	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
-1	x_2	1	-1	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	—
c_j-z_j			$4M+5$	0	0	$-M$	0	$\frac{3M}{2}+\frac{3}{2}$	$\frac{-5M}{2}-\frac{3}{2}$	$\frac{M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{3M}{2}$	
2	x_1	$3/4$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	$3/8$	$-3/8$	$1/8$	$-1/8$	
2	x_3	$7/2$	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	
-1	x_2	$7/4$	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/8$	$1/8$	$-3/8$	$3/8$	
c_j-z_j			0	0	0	$5/4$	$-M-\frac{5}{4}$	$-3/8$	$\frac{3}{8}-M$	$-9/8$	$\frac{9}{8}-M$	

由单纯形表的计算结果可以看出，$\sigma_4>0$ 且 $a_{i4}<0(i=1,2,3)$，所以该线性规划问题有无界解。

解 2：两阶段法。

先在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量 x_4,x_6,x_8，再加上人工变量 x_5,x_7,x_9，得第一阶段的数学模型

$$\min w=x_5+x_7+x_9$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6\\-2x_1+x_3-x_6+x_7=2\\2x_2-x_3-x_8+x_9=0\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

据此可列出单纯形表表 1—15：

表 1—15

c_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
1	x_5	6	1	1	1	-1	1	0	0	0	0	6
1	x_7	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
1	x_9	0	0	[2]	-1	0	0	0	0	-1	1	0
c_j-z_j			1	-3	-1	1	0	1	0	1	0	
1	x_5	6	1	0	$3/2$	-1	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	4
1	x_7	2	-2	0	[1]	0	0	-1	1	0	0	2
0	x_2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	—
c_j-z_j			1	0	$-5/2$	1	0	-1	0	$-1/2$	$3/2$	
1	x_5	3	[4]	0	0	-1	1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	$3/4$
0	x_3	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	—
0	x_2	1	-1	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	—

c_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
c_j-z_j			-4	0	0	1	0	$-3/2$	$5/2$	$-1/2$	$3/2$	
0	x_1	3/4	1	0	0	$-1/4$	1/4	3/8	$-3/8$	1/8	$-1/8$	
0	x_3	7/2	0	0	1	$-1/2$	1/2	$-1/4$	1/4	1/4	$-1/4$	
0	x_2	7/4	0	1	0	$-1/4$	1/4	$-1/8$	1/8	$-3/8$	3/8	
c_j-z_j			0	0	0	0	1	0	1	0	1	

第一阶段求得的最优解 $X^*=(\frac{3}{4},\frac{7}{4},\frac{7}{2},0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $w^*=0$。

因人工变量 $x_5=x_7=x_9=0$，所以$(\frac{3}{4},\frac{7}{4},\frac{7}{2},0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见表 1－16。

表 1－16

c_j			2	-1	2	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_8	
2	x_1	3/4	1	0	0	$-1/4$	3/8	1/8	
2	x_3	7/2	0	0	1	$-1/2$	$-1/4$	1/4	
-1	x_2	7/4	0	1	0	$-1/4$	$-1/8$	$-3/8$	
c_j-z_j			0	0	0	5/4	$-3/8$	$-9/8$	

由表中计算可知，$\sigma_4>0$ 且 $a_{i4}<0(i=1,2,3)$，所以原线性规划问题有无界解。

小结　大 M 法和两阶段法都是人工变量法。

◎1.7　求下述线性规划问题目标函数 z 的上界 $\bar{z}^*$ 和下界 $\underline{z}^*$

$$\max\ z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

其中：$1\leqslant c_1\leqslant 3$，$4\leqslant c_2\leqslant 6$，$8\leqslant b_1\leqslant 12$，$10\leqslant b_2\leqslant 14$，$-1\leqslant a_{11}\leqslant 3$，$2\leqslant a_{12}\leqslant 5$，$2\leqslant a_{21}\leqslant 4$，$4\leqslant a_{22}\leqslant 6$

分析　先求出与 $\bar{z}^*$ 和 $\underline{z}^*$ 相对应的线性规划模型，再用单纯形法求解。

解　z 的上界 $\bar{z}^*$ 可由如下的线性规划模型求得

$$\max\ z=3x_1+6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2\leqslant 12 \\ 2x_1+4x_2\leqslant 14 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

在上述问题的第一个约束条件中加入松弛变量 x_3，第二个约束条件左右两边同时除

以 2 再加入松弛变量 x_4，得该线性规划问题的标准型

$$\max z=3x_1+6x_2+0x_3+0x_4$$

$$\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=12\\ x_1+2x_2+x_4=7\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1—17 所示。

表 1—17

c_j			3	6	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	−1	2	1	0	6
0	x_4	7	1	[2]	0	1	7/2
c_j-z_j			3	6	0	0	
0	x_3	5	−2	0	1	−1	
6	x_2	7/2	1/2	1	0	1/2	
c_j-z_j			0	0	0	−3	

由表中计算可知，该线性规划问题的最优解 $X^*=(0,\frac{7}{2},5,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数 z 的上界 $\bar{z}^*=z^*=6\times\frac{7}{2}=21$。由于存在非基变量检验数 $\sigma_1=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

z 的下界 $\underline{z}^*$ 可由如下的线性规划模型求得

$$\max z=x_1+4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 8\\ 4x_1+6x_2\leqslant 10\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

在上述问题的第一个约束条件中加入松弛变量 x_3，第二个约束条件左右两边同时除以 2 再加入松弛变量 x_4，得该线性规划问题的标准型

$$\max z=x_1+4x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3\qquad=8\\ 2x_1+3x_2\qquad+x_4=5\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

由线性规划问题的标准型可列出初始单纯形表逐步迭代，计算结果如表 1—18 所示。

表 1—18

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	8	3	[5]	1	0	8/5
0	x_4	5	2	3	0	1	5/3
c_j-z_j			1	4	0	0	

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_2	8/5	3/5	1	1/5	0	
0	x_4	1/5	1/5	0	−3/5	1	
c_j-z_j			−7/5	0	−4/5	0	

由表中计算可知，该线性规划问题的最优解 $X^*=(0,\frac{8}{5},0,\frac{1}{5})^{\mathrm{T}}$，目标函数 z 的下界 $\underline{z}^*=z^*=4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$。

◎**1.8**　表 1－19 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表。表中无人工变量，a_1、a_2、a_3、d、c_1、c_2 为待定常数。试说明这些常数分别取何值时，以下结论成立。

(1)表中解为惟一最优解；

(2)表中解为最优解，但存在无穷多最优解；

(3)该线性规划问题具有无界解；

(4)表中解非最优，为对解改进，换入变量为 x_1，换出变量为 x_6。

表 1－19

基　b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3　d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4　2	−1	−3	0	1	−1	0
x_6　3	a_3	−5	0	0	−4	1
c_j-z_j	c_1	c_2	0	0	−3	0

分析　分别根据各种类型的解的概念进行求解。

解　(1)当解为惟一最优解时，必有 $d\geqslant0,c_1<0,c_2<0$。

(2)当解为最优解，但存在无穷多最优解时，必有 $d\geqslant0,c_1\leqslant0,c_2=0$ 或 $d\geqslant0,c_1=0,c_2\leqslant0$。

(3)当该问题为无界解时，必有 $d\geqslant0,c_1\leqslant0,c_2>0$ 且 $a_1\leqslant0$。

(4)当解为非最优，为对解进行改进，当换入变量为 x_1，换出变量为 x_6，必有 $d\geqslant0$，$c_1>0$，且 $c_1\geqslant c_2$，$a_3>0$，$\frac{3}{a_3}<\frac{d}{4}$。

◎**1.9**　某昼夜服务的公交线路每天各时间区段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时　间	所需人数
1	6:00～10:00	60
2	10:00～14:00	70
3	14:00～18:00	60
4	18:00～22:00	50

班次	时　间	所需人数
5	22:00～2:00	20
6	2:00～6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间区段一开始时上班,并连续工作八小时,问该公交线路至少配备多少名司机和乘务人员。列出这个问题的线性规划模型。

分析　本题考查了线性规划模型的建立。

解　设 $x_k(k=1,2,3,4,5,6)$ 表示 x_k 名司机和乘务人员第 k 班次开始上班。由题意,有

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_6+x_1\geqslant 60 \\ x_1+x_2\geqslant 70 \\ x_2+x_3\geqslant 60 \\ x_3+x_4\geqslant 50 \\ x_4+x_5\geqslant 20 \\ x_5+x_6\geqslant 30 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

○**1.10**　某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A、B、C 含量,原料成本,各种原料的每月限制用量,三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 1－20 所示。

表 1－20

原料	甲	乙	丙	原料成本（元/千克）	每月限制用量（千克）
A	≥60%	≥15%		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	≤20%	≤60%	≤50%	1.00	1 200
加工费（元/千克）	0.50	0.40	0.30		
售　　价	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月应生产这三种牌号糖果各多少千克,使该厂获利最大？试建立这个问题的线性规划的数学模型。

解　设 x_1,x_2,x_3 分别为甲糖果中 A,B,C 的成份;x_4,x_5,x_6 分别为乙糖果中 A,B,C 的成份;x_7,x_8,x_9 分别为丙糖果中 A,B,C 的成份。由题意,有

$$\begin{aligned}\max z=&(3.40-0.50)\times(x_1+x_2+x_3)+(2.85-0.40)\times(x_4+x_5+x_6)\\ &+(2.25-0.30)\times(x_7+x_8+x_9)-2.00\times(x_1+x_4+x_7)\\ &-1.50\times(x_2+x_5+x_8)-1.00\times(x_3+x_6+x_9)\end{aligned}$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}\geqslant 0.6 \\
\dfrac{x_3}{x_1+x_2+x_3}\leqslant 0.2 \\
\dfrac{x_4}{x_4+x_5+x_6}\geqslant 0.15 \\
\dfrac{x_6}{x_4+x_5+x_6}\leqslant 0.6 \\
\dfrac{x_9}{x_7+x_8+x_9}\leqslant 0.5 \\
x_1+x_4+x_7\leqslant 2\ 000 \\
x_2+x_5+x_8\leqslant 2\ 500 \\
x_3+x_6+x_9\leqslant 1\ 200 \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0
\end{cases}
$$

对上式进行整理得到所求问题的线性规划模型

$$
\max z=0.9x_1+1.4x_2+1.9x_3+0.45x_4+0.95x_5+1.45x_6-0.05x_7+0.45x_8+0.95x_9
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
-0.4x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 0 \\
-0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3\leqslant 0 \\
-0.85x_4+0.15x_5+0.15x_6\leqslant 0 \\
-0.6x_4-0.6x_5+0.4x_6\leqslant 0 \\
-0.5x_7-0.5x_8+0.5x_9\leqslant 0 \\
x_1+x_4+x_7\leqslant 2\ 000 \\
x_2+x_5+x_8\leqslant 2\ 500 \\
x_3+x_6+x_9\leqslant 1\ 200 \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0
\end{cases}
$$

○ **1.11**　某厂生产三种产品Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，每种产品要经过 A，B 两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序，它们以 A_1，A_2 表示；有三种规格的设备能完成 B 工序，它们以 B_1，B_2，B_3 表示。产品Ⅰ可在 A，B 任何一种规格设备上加工。产品Ⅱ可在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品Ⅲ只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表（表1－21），要求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

表　1－21

设　备	产　品			设备有效台时	满负荷时的设备费用(元)
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6 000	300
A_2	7	9	12	10 000	321
B_1	6	8		4 000	250
B_2	4		11	7 000	783
B_3	7			4 000	200
原料费(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

解 对产品Ⅰ来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_1，x_2 件，转入 B 工序时，以 B_1，B_2，B_3 完成 B 工序的产品分别为 x_3，x_4，x_5 件；对产品Ⅱ来说，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_6，x_7 件，转入 B 工序时，以 B_1 完成 B 工序的产品为 x_8 件；对产品Ⅲ来说，设以 A_2 完成 A 工序的产品为 x_9 件，则以 B_2 完成 B 工序的产品也为 x_9 件。由上述条件可得：

$$x_1+x_2=x_3+x_4+x_5$$
$$x_6+x_7=x_8$$

由题目所给的数据可得到解此问题的数学模型为：

$$\begin{aligned}\max z=&(1.25-0.25)\times(x_1+x_2)+(2.00-0.35)\times(x_6+x_7)\\&+(2.80-0.50)\times x_9-\frac{300}{6\ 000}\times(5x_1+10x_6)\\&-\frac{321}{10\ 000}\times(7x_2+9x_7+12x_9)-\frac{250}{4\ 000}\times(6x_3+8x_8)\\&-\frac{783}{7\ 000}\times(4x_4+11x_9)-\frac{200}{4\ 000}\times 7x_5\end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+10x_6\leqslant 6\ 000\\7x_2+9x_7+12x_9\leqslant 10\ 000\\6x_3+8x_8\leqslant 4\ 000\\4x_4+11x_9\leqslant 7\ 000\\7x_5\leqslant 4\ 000\\x_1+x_2=x_3+x_4+x_5\\x_6+x_7=x_8\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\geqslant 0\end{cases}$$

解之得最优解为：

$x_1^*=1\ 200$， $x_2^*=230$， $x_3^*=0$，
$x_4^*=859$， $x_5^*=571$， $x_6^*=0$，
$x_7^*=500$， $x_8^*=500$， $x_9^*=324$。

最优值为 1 147 元。

第二章

对偶理论和灵敏度分析

内容提要

一、原问题与对偶问题的关系

若某线性规划（原问题）约束系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，约束条件右端为向量 $\boldsymbol{b}$，目标函数中的价值系数向量为 $\boldsymbol{C}$，则其对偶问题形式如表 2-1 所示。

表 2-1

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数 $\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
变量 $x_j\ (j=1,\cdots,n)$	有 n 个 $(j=1,\cdots,n)$ 约束条件
$x_j \geqslant 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j$
$x_j \leqslant 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j$
x_j 无约束	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$
约束条件 有 m 个 $(i=1,\cdots,m)$	变量 $y_i\ (i=1,\cdots,m)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$	$y_i \geqslant 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i$	$y_i \leqslant 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	y_i 无约束

二、对偶理论及其性质

1. 对称性：对偶问题的对偶是原问题。
2. 弱对偶性：若 $\overline{X}$ 是原问题的可行解，$\overline{Y}$ 是对偶问题的可行解，

   则有

$$C\overline{X} \leqslant \overline{Y}b$$

3. 无界性：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。
4. 可行解是最优解时的性质：

   设 $\hat{X}$ 是原问题的可行解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的可行解，当 $C\hat{X}=\hat{Y}b$ 时，$\hat{X}$、$\hat{Y}$ 均为最优解。
5. 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。
6. 互补松弛性：若 $\hat{X}$、$\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\hat{X}X_S=0$ 和 $Y_S\hat{X}=0$ 当且仅当 $\hat{X}$、$\hat{Y}$ 为最优解。
7. 设原问题是

$$\max\ z=CX;AX+X_S=b;X,X_S\geqslant 0$$

   它的对偶问题是

$$\min\ w=Yb;YA-Y_S=C;Y,Y_S\geqslant 0$$

   则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解。

三、对偶单纯形法

1. 对偶单纯形法与单纯形法的区别

对偶单纯形法是运用对偶原理求解原问题的一种方法，而不是求解对偶问题的单纯形法。它和单纯形法的主要区别在于：单纯形法是从一个原始问题的基本可行解转到另一个基本可行解，即迭代中始终保持原问题的可行性，亦即常数列 $b\geqslant 0$，而检验数 $\sigma=C-C_BB^{-1}A=C-YA$ 由有正分量逐步变为全部$\leqslant 0$（即变为满足 $YA\geqslant C$，Y 是对偶问题的基本可行解）为止。对偶单纯形法则是保持对偶问题解是基本可行解（即全部检验数 $\sigma\geqslant 0$），而原问题在非可行解（即常数列 b 有负的分量）的基础上通过逐步迭代达到基本可行解（即常数列 b 全部$\geqslant 0$）。这样，同时得到原问题和对偶问题的最优解。

2. 对偶单纯形法的计算步骤

(1) 将问题化为标准型，列出初始单纯形表格。

(2) 若存在初始对偶可行的基本解，则进行迭代。

(3) 检验 $\boldsymbol{b}$ 列的数字，若检验数全部非正而 $\boldsymbol{b}$ 列都为非负，则问题已得到最优解，终止迭代；否则，若检验数全部非正而 $\boldsymbol{b}$ 列至少还有一个负分量，进行下一步。

(4) 确定换出变量，即按

$$\min_i\{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i \mid (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i<0\}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l$$

对应的基变量 x_l 为换出变量。

(5)确定换入变量：检查 x_l 所所在行的各系数 $a_{lj}(j=1,2,\cdots,n)$。

若所有 $a_{lj}\geqslant 0$，则无可行解停止迭代，若存在 $a_{lj}<0$，按 θ 法则，即

$$\theta=\min_{j}\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}}\middle| a_{lj}<0\right\}=\frac{\sigma_k}{a_{lk}}$$

所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量。

(6) 实施枢轴运算，即以 a_{lk} 为主元素按原单纯形法在表中进行迭代运算，得新的单纯形表格，转步骤(3)继续迭代。

四、影子价格

影子价格：根据资源在生产中作出的贡献而作的估价。影子价格是一种边际价格，其值相当于在资源得到最优利用的生产条件下，资源每增加一个单位时目标函数增加量。

影子价格的大小反映了资源的稀缺和富有程度。在完全市场经济的条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源以扩大再生产；反之，则应将已有资源卖掉。可见，影子价格对市场有调节作用。

五、灵敏度分析

由于可用资源的数量发生变化，右边限制系数 b_i 会发生变化，由于市场条件发生变化，价值系数 c_j 会发生变化；由于生产工艺的改进，约束条件系数 a_{ij} 会发生变化。

当线性规划问题中的一个或几个系数发生变化后，原来求得的结果一般会发生变化。

灵敏度分析的步骤可归纳如下：

1. 将参数的改变计算反映到最终单纯形表上来：

   具体计算方法是，按下列公式计算出由参数 a_{ij}、b_i、c_j 的变化而引起的最终单纯形表上有关数字的变化：

$$\Delta \boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\Delta \boldsymbol{b}$$

$$\Delta \boldsymbol{P}_i^*=\boldsymbol{B}^{-1}\Delta \boldsymbol{P}_i$$

$$\Delta(c_j-z_j)^*=\Delta(c_j-z_j)-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*$$

2. 检查原问题是否仍为可行解；
3. 检查对偶问题是否仍为可行解；
4. 按表 2-2 所列情况得出结论和决定继续计算的步骤。

表 2-2

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	仍为问题最优解
可行解	非可行解	用单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法继续迭代求最优解
非可行解	非可行解	引进人工变量，编制新的单纯形表重新计算

典型例题与解题技巧

【例 1】 写出线性规划问题的对偶问题

$$\max z=6x_1-2x_2+3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3\leqslant 2\\ x_1\qquad\ \ +4x_3\leqslant 4\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解题分析 要理清原问题的约束条件与对偶问题变量之间的对应关系，以及原问题的变量与对偶问题的约束条件之间的对应关系。

此题恰好是形如对称形式的原问题要求写其对偶问题，解题难度在于要能将原问题的变量和约束条件分别与对偶问题的约束条件和变量相对应，然后写出目标函数和约束条件。

解题过程 原问题中：$\boldsymbol{C}=(6,-2,3)$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&0&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，因为原问题的变量有三个且全"$\geqslant 0$"，所以对偶问题的约束条件应有三个且全是"$\geqslant$"约束；原问题的约束条件有两个且全是"$\leqslant$"约束，所以对偶问题的变量也应有两个且全应"$\geqslant 0$"；所以原问题的对偶问题为

$$\min w=\boldsymbol{Yb}=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=2y_1+4y_2$$

$\boldsymbol{YA}=[y_1,y_2]\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&0&4\end{bmatrix}=[2y_1+y_2,-y_1,2y_1+4y_2]$，由 $\boldsymbol{C}=[6,-2,3]$

可知对偶问题为

$$\min w=2y_1+4y_2$$

$$s.t.\begin{cases}2y_1+\ y_2\geqslant 6\\ -y_1\qquad\ \geqslant -2\\ 2y_1+4y_2\geqslant 3\\ y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2】 写出以下线性规划的对偶问题：

(1) $\max z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}c_{ik}x_{ik}$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_{ik}=s_k & (k=1,\cdots,m)\\ \sum_{k=1}^{m}b_{ik}x_{ik}=p_i & (i=1,\cdots,n)\\ x_{ik}\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

(2) $\min z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4-i+1}c_j x_{ij}$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{4-i+1}x_{ij}\geqslant r_k & (k=1,2,3,4)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,\cdots,4;j=1,\cdots,4-i+1)\end{cases}$$

解题分析　需将原问题展开，找出变量和约束条件，然后设出其对应的对偶变量，写出对偶规划。

解题过程　(1) $\min w=\sum_{k=1}^{m}s_k y_k+\sum_{i=1}^{n}p_i z_i$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{ik}y_k+b_{ik}z_i\geqslant c_{ik} & (i=1,\cdots,n;k=1,\cdots,m)\\ y_k,z_i \text{ 无约束}\end{cases}$$

(2) $\max w=\sum_{t=1}^{4}r_t y_t$

$$\text{s.t.}\begin{cases}y_t\leqslant c_1 & (t=1,2,3,4)\\ y_t+y_{t+1}\leqslant c_2 & (t=1,2,3)\\ y_t+y_{t+1}+y_{t+2}\leqslant c_3 & (t=1,2)\\ y_1+y_2+y_3+y_4\leqslant c_4 & \\ y_t\geqslant 0 & (t=1,2,3,4)\end{cases}$$

历年考研真题评析

【题 1】　(2006 年西北工业大学)已知线性规划：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 4\\ 3x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1-x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(1)用单纯形法求解该线性规划问题的最优解和最优值；

(2)写出线性规划的对偶问题。

(3)求解对偶问题的最优解和最优值。

解题分析　本题考察了线性规划与对偶的基础知识，要求读者熟知对偶理论。

解题过程

$$\boldsymbol{X}^*=\left[\frac{18}{5}\ \ \frac{3}{5}\ \ \frac{32}{5}\ \ 0\ \ 0\right]^{\mathrm{T}}$$

$\max z=12$，有无穷多解

对偶问题为

$$\min w=4y_1+12y_2+3y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1+3y_2+y_3\geqslant 3\\ 2y_1+2y_2-y_3\geqslant 2 & i=1,2,3\\ y_i\geqslant 0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{Y}^*=[0\ \ 1\ \ 0]\qquad w^*=z^*=12$$

【题 2】 (2005 年东南大学)写出如下线性规划问题的对偶问题：

$$\max z=x_1+2x_2+x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2-x_3\leqslant 2\\x_1-x_2+x_3=1\\2x_1-x_2+x_3\geqslant 2\\x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0,x_3\text{ 无限制}\end{cases}$$

并利用弱对偶性说明 z 的最大值不大于 1。

解题分析 同上一题一样,考察对偶理论基本知识。

解题过程 原问题的对偶问题为：

$$\min w=2y_1+y_2+2y_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}y_1+y_2+2y_3\geqslant 1\\y_1-y_2+y_3\leqslant 2\\-y_1+y_2+y_3=1\\y_1\geqslant 0,y_2\text{ 无限制},y_3\leqslant 0\end{cases}$$

由于(0,1,0)是上述对偶问题的可行解,由弱对偶性可知,对原问题的任一可行解 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 都有

$$\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{X}}\leqslant \boldsymbol{Yb}$$

而 $\boldsymbol{Yb}=[0\ 1\ 0]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=1$,所以 z 的最大值不大于 1。

课后习题全解

◎2.1 用改进单纯形法求解以下线性规划问题.

(1) $\max z=6x_1-2x_2+3x_3$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3\leqslant 2\\x_1+4x_3\leqslant 4\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+x_2$

$$\begin{cases}3x_1+x_2=3\\4x_1+3x_2\geqslant 6\\x_1+2x_2\leqslant 3\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析 先将线性规划问题转化为标准形式再用改进单纯形法求解。

解 (1) 将上述线性规划问题转化为标准形式

$$\max z=6x_1-2x_2+3x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3+x_4=2\\x_1+4x_3+x_5=4\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

取

$$B_0=(P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad X_{B_0}=(x_4,x_5)^{\mathrm{T}},\quad C_{B_0}=(0,0),$$

$$N_0=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&4\end{pmatrix},\quad X_{N_0}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},$$

$$C_{N_0}=(6,-2,3),\quad B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad b_0=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0=C_{N_0}=(6,-2,3)$$

$\because x_1$ 的检验数 $\sigma_1=6$ 为正的最大，

$\therefore x_1$ 为换入变量。

$$B_0^{-1}b_0=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\quad B_0^{-1}P_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_0^{-1}b_0)_i}{(B_0^{-1}P_1)_i}\,\Big|\,(B_0^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{2}{2},\frac{4}{1}\right\}=1$$

$\therefore x_4$ 为换出变量

$$B_1=(P_1,P_5)=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},\quad X_{B_1}=(x_1,x_5)^{\mathrm{T}},\quad C_{B_1}=(6,0),$$

$$N_1=(P_4,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix},\quad X_{N_1}=(x_4,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},$$

$$C_{N_1}=(0,-2,3),\quad B_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},$$

$$b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{N_1}&=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1\\&=(0,-2,3)-(6,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\\&=(0,-2,3)-(3,0)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\\&=(0,-2,3)-(3,-3,6)=(-3,1,-3)\end{aligned}$$

$\because x_2$ 的检验数 $\sigma_2=1$ 为正的最大，

$\therefore x_2$ 为换入变量。

$$B_1^{-1}b_0=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\qquad B_1^{-1}P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_1^{-1}b_0)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i}\middle|(B_0^{-1}P_2)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{3}{1/2}\right\}=6$$

∴x_5 为换出变量。

$$B_2=(P_1,P_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix},X_{B_2}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\qquad C_{B_2}=(6,-2),$$

$$N_2=(P_4,P_5,P_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\end{pmatrix},X_{N_2}=(x_4,x_5,x_3)^{\mathrm{T}},C_{N_2}=(0,0,3),$$

$$B_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix},b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{N_2}&=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2\\&=(0,0,3)-(6,-2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\end{pmatrix}\\&=(0,0,3)-(2,2)\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&4\end{pmatrix}\\&=(0,0,3)-(2,2,12)=(-2,-2,-9)\end{aligned}$$

∵非基变量的检验数均为负，

∴原问题已达到最优解。

最优解

$$X^*=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=B_2^{-1}b_0=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

即

$$X^*=(4,6,0)^{\mathrm{T}}$$

目标函数最优值 $\max z=6\times4-2\times6+3\times0=12$。

（2）将上述线性规划问题化为如下形式：

$$\min z=2x_1+x_2+0\cdot x_3+M\cdot x_4+M\cdot x_5+0\cdot x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+x_2+x_4=3\\4x_1+3x_2-x_3+x_5=6\\x_1+2x_2+x_6=3\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant0\end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。

取

$$B_0=(P_4,P_5,P_6)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad X_{B_0}=(x_4,x_5,x_6)^{\mathrm{T}},$$

$$C_{B_0}=(M,M,0),N_0=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}3&1&0\\4&3&-1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$X_{N_0}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\qquad C_{N_0}=(2,1,0),$$

$$B_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad b_0=(3,6,3)^{\mathrm{T}}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_0}=C_{N_0}-C_{B_0}B_0^{-1}N_0$$

$$=(2,1,0)-(M,M,0)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\4&3&-1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$=(2,1,0)-(7M,4M,-M)$$

$$=(2-7M,1-4M,M)$$

∵x_1 的检验数 $\sigma_1=2-7M$ 为负的最小，

∴x_1 为换入变量。

$$B_0^{-1}b_0=\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix},\qquad B_0^{-1}P_1=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_1)_i}\,\middle|\,(B_0^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{3}{3},\frac{6}{4},\frac{3}{1}\right\}=1$$

∴x_4 为换出变量。

$$B_1=(P_1,P_5,P_6)=\begin{bmatrix}3&0&0\\4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},X_{B_1}=(x_1,x_5,x_6)^{\mathrm{T}},C_{B_1}=(2,M,0),$$

$$N_1=(P_4,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&3&-1\\0&2&0\end{bmatrix},X_{N_1}=(x_4,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},C_{N_1}=(M,1,0),$$

$$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{4}{3}&1&0\\-\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix},b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{4}{3}&1&0\\-\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_1}=C_{N_1}-C_{B_1}B_1^{-1}N_1$$

$$=(M,1,0)-(2,M,0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,1,0)-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}M,M,0\right)\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,1,0)-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}M,\frac{2}{3}+\frac{5}{3}M,-M\right)$$

$$=\left(\frac{7}{3}M-\frac{2}{3},\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,M\right)$$

∵ x_2 的检验数 $\sigma_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$ 为负的最小，

∴ x_2 为换入变量。

$$B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\qquad B_1^{-1}P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta=\min_i\left\{\frac{(B_1^{-1}b_0)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i}\,\middle|\,(B_1^{-1}P_2)_i>0\right\}=\min\left\{\frac{1}{1/3},\frac{2}{5/3},\frac{2}{5/3}\right\}=\frac{6}{5}$$

∴ x_5 为换出变量。

$$B_2=(P_1,P_2,P_6)=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},X_{B_2}=(x_1,x_2,x_6)^{\mathrm{T}},\qquad C_{B_2}=(2,1,0),$$

$$N_2=(P_4,P_5,P_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$X_{N_2}=(x_4,x_5,x_3)^{\mathrm{T}}$,　　$C_{N_2}=(M,M,0)$,

$$B_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\\ 0\end{bmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_2}=C_{N_2}-C_{B_2}B_2^{-1}N_2$$

$$=(M,M,0)-(2,1,0)\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,M,0)-\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(M,M,0)-\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\left(M-\frac{2}{5},M-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$$

∵非基变量的检验数均为正，

∴原问题已达到最优解。

最优解

$$X^*=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\\ 0\end{bmatrix}$$

目标函数的最优值

$$\min z=2x_1+x_2=2\times\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$$

○ **2.2** 已知某线性规划问题，用单纯形法计算时得到的中间某两步的计算表见表2－3，试将表中空白处数字填上。

表 2－3

c_j			3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
c_j-z_j			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
⋮								
	x_2					$-\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
	x_3					$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
	x_1					$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
c_j-z_j								

解 令

$$b_1=\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3},\frac{20}{3}\right)^{\mathrm{T}},\qquad b_0=(b_{01},b_{02},b_{03})^{\mathrm{T}}$$

则

$$b_1=B_1^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{2}{3}&1&0\\-\frac{2}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\b_{03}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{14}{3}\\\frac{20}{3}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}\frac{1}{3}b_{01}=\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}b_{01}+b_{02}=\frac{14}{3}\\-\frac{2}{3}b_{01}+b_{03}=\frac{20}{3}\end{cases}$$

解得 $b_{01}=8, b_{02}=10, b_{03}=12$。

$$\therefore b_0=\begin{bmatrix}8\\10\\12\end{bmatrix}$$

$$\therefore b_2=B_2^{-1}b_0=\begin{bmatrix}\frac{15}{41}&\frac{8}{41}&-\frac{10}{41}\\-\frac{6}{41}&\frac{5}{41}&\frac{4}{41}\\\frac{-2}{41}&-\frac{12}{41}&\frac{15}{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\10\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{80}{41}\\\frac{50}{41}\\\frac{44}{41}\end{bmatrix}$$

∴表 2—4 中的数字填写如下：

表 2—4

c_j			3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
0	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
c_j-z_j			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
⋮								
5	x_2	$\frac{80}{41}$	0	1	0	$\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
4	x_3	$\frac{50}{41}$	0	0	1	$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
3	x_1	$\frac{44}{41}$	1	0	0	$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
c_j-z_j			0	0	0	$-\frac{45}{41}$	$-\frac{24}{41}$	$-\frac{11}{41}$

◎2.3　写出下列线性规划问题的对偶问题。

(1) $\min z=2x_1+2x_2+4x_3$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3\geqslant 2\\3x_1+x_2+7x_3\leqslant 3\\x_1+4x_2+6x_3\leqslant 5\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3-3x_4=5\\6x_1+7x_2+3x_3-5x_4\geqslant 8\\12x_1-9x_2-9x_3+9x_4\leqslant 20\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\leqslant 0,x_4\text{ 无约束}\end{cases}$$

(3) $\min z=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,\cdots,m)\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,\cdots,n)\\x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,i=1,\cdots,m_1\leqslant m\\\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m\\x_j\geqslant 0,\text{当 }j=1,\cdots,n_1\leqslant n\\x_j\text{ 无约束，当 }j=n_1+1,\cdots,n\end{cases}$$

分析　本题考查了对偶问题的转化。

解　(1) 将原问题化为

$$\max(-z)=-2x_1-2x_2-4x_3$$

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2-5x_3\leqslant -2 & ①\\3x_1+x_2+7x_3\leqslant 3 & ②\\x_1+4x_2+6x_3\leqslant 5 & ③\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0 & ④\end{cases}$$

设 y_1,y_2,y_3 分别为与约束条件①②③对应的对偶变量

此问题的对偶问题为

$$\min(-w)=-2y_1+3y_2+5y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2y_1+3y_2+y_3\geqslant -2\\-3y_1+y_2+4y_3\geqslant -2\\-5y_1+7y_2+6y_3\geqslant -4\\y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\max\ w=2y_1-3y_2-5y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1-3y_2-y_3\leqslant 2\\3y_1-y_2-4y_3\leqslant 2\\5y_1-7y_2-6y_3\leqslant 4\\y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) 令 $x_5=-x_3,x_4=x_6-x_7$，其中 $x_6,x_7\geqslant 0$

将上述问题转化为如下形式

$$\max\ z=x_1+2x_2-3x_5+4x_6-4x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_5-3x_6+3x_7\leqslant 5 & ①\\x_1-x_2-x_5+3x_6-3x_7\leqslant -5 & ②\\-6x_1-7x_2+3x_5+5x_6-5x_7\leqslant -8 & ③\\12x_1-9x_2+9x_5+9x_6-9x_7\leqslant 20 & ④\\x_1,x_2,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

设 y_1,y_2,y_3,y_4 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量。

此问题的对偶问题为

$$\min\ w=5y_1-5y_2-8y_3+20y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1+y_2-6y_3+12y_4\geqslant 1\\y_1-y_2-7y_3-9y_4\geqslant 2\\y_1-y_2+3y_3+9y_4\geqslant -3\\-3y_1+3y_2+5y_3+9y_4\geqslant 4\\3y_1-3y_2-5y_3-9y_4\geqslant -4\\y_1,y_2,y_3,y_4\geqslant 0\end{cases}$$

令 $y'_1=y_1-y_2,y'_3=-y_3$，进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\min\ w=5y'_1+8y'_3+20y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y'_1+6y'_3+12y_4\geqslant 1\\y'_1+7y'_3-9y_4\geqslant 2\\-y'_1+3y'_3-9y_4\leqslant 3\\-3y'_1-5y'_3+9y_4=4\\y'_1\ \text{无约束},y'_3\leqslant 0,y_4\geqslant 0\end{cases}$$

(3) 将上述问题化为如下形式

$$\max\ (-z)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m) & ①\\
-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant -a_i & (i=1,2,\cdots,m) & ②\\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n) & ③\\
-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant -b_j & (j=1,2,\cdots,n) & ④\\
x_{ij} \geqslant 0
\end{cases}
$$

设 $y_i, y'_i, y_{m+j}, y'_{m+j}$ 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量，此问题的对偶问题为

$$\min\ (-w) = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i - \sum_{i=1}^{m} a_i y'_i + \sum_{j=1}^{n} b_j y_{m+j} - \sum_{j=1}^{n} b_j y'_{m+j}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_i + y_{m+j} - y'_i - y'_{m+j} \geqslant -c_{ij} \\ y_i, y_{m+j}, y'_i, y'_{m+j} \geqslant 0 \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

令 $y''_i = y'_i - y_i, y''_{m+j} = y'_{m+j} - y_{m+j}$，进行整理，得到原问题的对偶问题为

$$\max\ w = \sum_{i=1}^{m} a_i y''_i + \sum_{j=1}^{n} b_j y''_{m+j}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y''_i + y''_{m+j} \leqslant c_{ij} \\ y''_i, y''_{m+j}\text{无约束} \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

将上述问题化为如下形式

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m_1, m_1 \leqslant m)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i & (i=m_1+1, m_1+2,\cdots,m)\\
-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant -b_i & (i=m_1+1, m_1+2,\cdots,m)\\
x_j \geqslant 0 & (j=1,\cdots,n_1, n_1 \leqslant n)\\
x_j\ \text{无约束} & (j=n_1+1, n_1+2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

令 $x_j = x'_j - x''_j$ 且 $x'_j, x''_j \geqslant 0 \qquad (j=n_1+1, n_1+2,\cdots,n)$

则得到

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j (x'_j - x''_j)$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j+\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m_1,m_1\leqslant m) & ①\\ \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j+\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant b_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m) & ②\\ -\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j-\sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j-x''_j)\leqslant -b_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m) & ③\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n_1,n_1\leqslant n)\\ x'_j,x''_j\geqslant 0 & (j=n_1+1,n_1+2,\cdots,n)\end{cases}$$

设 $y_i(i=1,2,\cdots m_1)$，　$y_i(i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m)$

$y'_i(i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m)$

分别为与约束条件①②③相对应的对偶变量，

此问题的对偶问题为

$$\min\ w=\sum_{i=1}^{m} y_ib_i-\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ib_i$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} y_ia_{ij}-\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ia_{ij}\geqslant c_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ -\sum_{i=m_1+1}^{m} y_ia_{ij}+\sum_{i=m_1+1}^{m} y'_ia_{ij}\geqslant -c_j & (j=n_1+1,n_2+2,\cdots,n)\\ y_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots m)\\ y'_i\geqslant 0 & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots n)\end{cases}$$

令

$$y''_i=\begin{cases}y_i & (i=1,2,\cdots,m_1)\\ y_i-y'_i & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots m)\end{cases}$$

对上式进行整理得到问题的对偶问题为

$$\min\ w=\sum_{i=1}^{m} b_iy''_i$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y''_i\geqslant c_j & (i=1,2,\cdots n_1)\\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y''_i=c_j & (j=n_1+1,n_1+2,\cdots n)\\ y''_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m_1)\\ y''_i\ \text{无约束} & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots m)\end{cases}$$

○ **2.4**　判断下列说法是否正确，为什么？

（1）如线性规划的原问题存在可行解，则其对偶问题也一定存在可行解；

（2）如线性规划的对偶问题无可行解，则原问题也一定无可行解；

（3）如果线性规划的原问题和对偶问题都具有可行解，则该线性规划问题一定具有有限最优解。

解　（1）错误。原问题存在可行解，对偶问题可能存在可行解也可能无可行解。

（2）错误。线性规划的对偶问题无可行解，则原问题可能无可行解也可能为无界解。

（3）错误。线性规划问题的原问题和对偶问题都具有可行解，则该线性规划问题可能有有限最优解也可能为无界解。

◎**2.5**　设线性规划问题 1 是

$$\max z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ 是其对偶问题的最优解。

又设线性规问题 2 是

$$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i + k_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 k_i 是给定的常数，求证

$$\max z_2 \leqslant \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$$

分析　对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证明　将原问题用矩阵形式描述如下：

①

$$\max z_1 = CX$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $b=(b_1, b_2, \cdots b_m)^{\mathrm{T}}$

设其可行解为 X_1，其对偶问题的最优解为 $Y_1=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$ 为已知。

②

$$\max z_2 = CX$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} AX \leqslant b+k \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $k=(k_1, k_2, \cdots k_m)^{\mathrm{T}}$

设其可行解为 X_2，其对偶问题的最优解为 Y_2，②的对偶问题为

$$\min w = Y(b+k)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} YA \geqslant C \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$$

$\because Y_2$ 为最优解，$\therefore Y_2(b+k) \leqslant Y_1(b+k)$

$\because X_2$ 为②的可行解，$\therefore AX_2 \leqslant b+k$

$\therefore Y_2 A X_2 \leqslant Y_2(b+k) \leqslant (Y_1 b + k)$

∵原问题与对偶问题的最优函数值相等，∴$\max z_2 \leqslant \max z_1 + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i^*$ 。

2.6 已知线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5$$

用单纯形法求解，得到最终单纯形表如表 2—5 所示，要求：

(1)求 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2$ 的值；

(2)求 c_1, c_2, c_3 的值。

表 2—5

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3/2	1	0	1	1/2	−1/2
x_2	2	1/2	1	0	−1	2
$c_j - z_j$		−3	0	0	0	−4

解 (1) $B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}，即$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}a_{11} - \frac{1}{2}a_{21} = 1 \\ \frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{2}a_{22} = 0 \\ \frac{1}{2}a_{13} - \frac{1}{2}a_{23} = 1, \\ -b_1 + 2b_2 = 2 \\ -a_{11} + 2a_{21} = \frac{1}{2} \\ -a_{12} + 2a_{22} = 1 \\ -a_{13} + 2a_{23} = 0 \end{cases} \quad 解之得 \begin{cases} a_{11} = -\frac{1}{2} \\ a_{12} = 1 \\ a_{13} = 4 \\ a_{21} = -\frac{5}{2} \\ a_{22} = 1 \\ a_{23} = 2 \\ b_1 = 8 \\ b_2 = 5 \end{cases}$$

(2)由最终单纯形表 2—9，$\begin{cases} c_1 - c_3 - \frac{1}{2}c_2 = -3 \\ -\frac{1}{2}c_3 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}c_3 - 2c_2 = -4 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} c_1 = 7 \\ c_2 = 4 \\ c_3 = 8 \end{cases}$

◎2.7　已知线性规划问题

$$\max z=2x_1+x_2+5x_3+6x_4 \qquad \text{对偶变量}$$

$$\begin{cases}2x_1 \qquad +x_3+\ x_4\leqslant 8 & y_1\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4\leqslant 12 & y_2\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^*=4, y_2^*=1$，试应用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

分析　根据对偶定理和互补松弛性即可求解。

解　原问题的对偶问题为

$$\min w=8y_1+12y_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2y_1+2y_2\geqslant 2 & (1)\\ 2y_2\geqslant 1 & (2)\\ y_1+y_2\geqslant 5 & (3)\\ y_1+2y_2\geqslant 6 & (4)\\ y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

将 $y_1^*=4, y_2^*=1$ 代入约束条件，可知(1)、(2)式为严格不等式，由互补松弛性得 $x_1^*=x_2^*=0$，因 $y_1^*, y_2^*>0$，由互补松弛性知，原问题的两个约束条件应取等式，即

$$\begin{cases}x_3+x_4=8\\ x_3+2x_4=12\end{cases}$$

解之得 $x_3^*=x_4^*=4$，所以原问题最优解 $X^*=(0,0,4,4)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=5\times 4+6\times 4=44$。

○ 2.8　试用对偶单纯形法求解下列线性规划问题。

(1) $\min z=x_1+x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 4\\ x_1+7x_2\geqslant 7\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=3x_1+2x_2+x_3+4x_4$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+5x_3+x_4\geqslant 0\\ 3x_1-x_2+7x_3-2x_4\geqslant 2\\ 5x_1+2x_2+x_3+6x_4\geqslant 15\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

解　(1)先将此问题化成如下形式，以便得到对偶问题的初始可行基。

$$\max w=-x_1-x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-2x_1-\ x_2+x_3 \qquad =-4\\ -x_1-7x_2 \qquad +x_4=-7\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2－6

c_j			-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-4	-2	-1	1	0
0	x_4	-7	-1	$[-7]$	0	1
c_j-z_j			-1	-1	0	0
0	x_3	-3	$[-13/7]$	0	1	$-1/7$
-1	x_2	1	$1/7$	1	0	$-1/7$
c_j-z_j			$-6/7$	0	0	$-1/7$
-1	x_1	$21/13$	1	0	$-7/13$	$1/13$
-1	x_2	$10/13$	0	1	$1/13$	$-2/13$
c_j-z_j			0	0	$-6/13$	$-1/13$

由表中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{21}{13},\frac{10}{13},0,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=\frac{21}{13}+\frac{10}{13}=\frac{31}{13}$。

(2)先将此问题化成如下形式，以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max w=-3x_1-2x_2-x_3-4x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1-4x_2-5x_3-x_4+x_5=0\\-3x_1+x_2-7x_3+2x_4+x_6=-2\\-5x_1-2x_2-x_3-6x_4+x_7=-15\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2－7

c_j			-3	-2	-1	-4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	-2	-4	-5	-1	1	0	0
0	x_6	-2	-3	1	-7	2	0	1	0
0	x_7	-15	$[-5]$	-2	-1	-6	0	0	1
c_j-z_j			-3	-2	-1	-4	0	0	0
0	x_5	6	0	$-16/5$	$-23/5$	$7/5$	1	0	$-2/5$
0	x_6	7	0	$11/5$	$-32/5$	$28/5$	0	1	$-3/5$
-3	x_1	3	1	$2/5$	$1/5$	$6/5$	0	0	$-1/5$
c_j-z_j			0	$-4/5$	$-2/5$	$-2/5$	0	0	$-3/5$

由表 2－7 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(3,0,0,0,6,7,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=3\times3=9$。

◎**2.9** 现有线性规划问题

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3$$

$$\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3\leqslant 20 & ① \\ 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90 & ② \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解分别有什么变化？

(1)约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

(2)约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

(3)目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

(4) x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$；

(5)增加一个约束条件③ $2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$；

(6)将原约束条件②改变为 $10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$。

分析　将原问题化为标准型并用单纯形法求解，再用对偶单纯形法对各个问题求解。

解　在上述线性规划问题的第①、②个约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5，得

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3+x_4 \quad =20 \\ 12x_1+4x_2+10x_3 \quad +x_5=90 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

列出此问题的初始单纯形表，并进行迭代计算。

表 2－8

c_j			-5	5	13	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	-1	1	[3]	1	0	20/3
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9
c_j-z_j			-5	5	13	0	0	
13	x_3	20/3	$-1/3$	[1/3]	1	1/3	0	20
0	x_5	70/3	46/3	2/3	0	$-10/3$	1	35
c_j-z_j			$-2/3$	2/3	0	$-13/3$	0	
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	
c_j-z_j			0	0	-2	-5	0	

由表 2－8 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(0,20,0,0,10)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=5\times 20=100$。

(1)约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\-30\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—9

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	30	-1	1	3	1	0
0	x_5	-30	16	0	[-2]	-4	1
c_j-z_j			0	0	-2	-5	0
5	x_2	-15	23	1	0	[-5]	3/2
13	x_3	15	-8	0	1	2	$-1/2$
c_j-z_j			-16	0	0	-1	-1
0	x_4	3	$-23/5$	$-1/5$	0	1	$-3/10$
13	x_3	9	6/5	2/5	1	0	1/10
c_j-z_j			$-103/5$	$-1/5$	0	0	$-13/10$

由表 2—9 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,0,9,3,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=13\times9=117$。

(2)约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\-10\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—10

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	-10	16	0	[-2]	-4	1
c_j-z_j			0	0	-2	-5	0
5	x_2	5	23	1	0	-5	3/2
13	x_3	5	-8	0	1	2	$-1/2$
c_j-z_j			-16	0	0	-1	-1

由表 2—10 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,5,5,0,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=5\times5+13\times5=90$。

(3)目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

x_3 为非基变量，其检验数变为 $\sigma_3=8-5\times3-0\times(-2)=-7<0$，所以线性规划问题的最优解不变。

(4)x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$；

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$，从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=-5<0$，所以

线性规划问题的最优解不变 。

(5)增加一个约束条件：$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$；在约束条件③中加入松弛变量 x_6，得 $2x_1+3x_2+5x_3+x_6=50$，加入原单纯形表，并进行迭代计算。

表 2－11

c_j			-5	5	13	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	50	2	3	5	0	0	1
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	-10	5	0	$[-4]$	-3	0	1
c_j-z_j			0	0	-2	-5	0	0
5	x_2	25/2	11/4	1	0	$-5/4$	0	3/4
0	x_5	15	27/2	0	0	$-5/2$	1	$-1/2$
13	x_3	5/2	$-5/4$	0	1	3/4	0	$-1/4$
c_j-z_j			$-5/2$	0	0	$-7/2$	0	$-1/2$

由表 2－11 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=\left(0,\dfrac{25}{2},\dfrac{5}{2},0,15,0\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=5\times\dfrac{25}{2}+13\times\dfrac{5}{2}=95$。

(6)将原约束条件②改变为：$10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}$，从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}=0$

x_2 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_2=B^{-1}P_2=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，从而 x_2 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_2=c_2-C_BB^{-1}P_2=5-(5,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0$

又因为 $B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\20\end{bmatrix}$的各分量均大于 0，所以线性规划问题的最优解不变。

●**2.10** 已知某工厂计划生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品,各种产品都需要在 A,B,C 设备上加工,有关数据见表 2-12,试回答。

表 2—12

设备代号	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	设备有效台时/每月
A	8	2	10	300
B	10	5	8	400
C	2	13	10	420
单位产品利润/千元	3	2	2.9	

(1)如何充分发挥设备能力,使生产盈利最大?

(2)若为了增加产量,可借用其他工厂的设备 B,每月可借用 60 台时,租金为 1.8 万元,问借用 B 设备是否合算?

(3)若另有两种新产品Ⅳ,Ⅴ,其中Ⅳ需用设备 A—12 台时,B—5 台时,C—10 台时,单位产品盈利 2.1 千元;新产品Ⅴ需用设备 A—4 台时,B—4 台时,C—12 台时,单位产品盈利 1.87 千元。如 A,B,C 设备台时不增加,分别回答这两种新产品投产在经济上是否合算?

(4)对产品工艺重新进行设计,改进结构,改进后生产每件产品Ⅰ,需用设备 A—9 台时,设备 B—12 台时,设备 C—4 台时,单位产品盈利 4.5 千元,问这对原计划有何影响?

分析 根据题意列出线性规划模型,再化为标准型并用单纯形法求解。

解 (1)设分别生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品 x_1,x_2,x_3 单位,由题意,可列出如下线性规划模型

$$\max z=3x_1+2x_2+2.9x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+2x_2+10x_3\leqslant 300\\10x_1+5x_2+8x_3\leqslant 400\\2x_1+13x_2+10x_3\leqslant 420\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

在上述线性规划问题的约束条件中分别加入人工变量 x_4,x_5,x_6,得

$$\max z=3x_1+2x_2+2.9x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+2x_2+10x_3+x_4=300\\10x_1+5x_2+8x_3+x_5=400\\2x_1+13x_2+10x_3+x_6=420\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

列出此问题的初始单纯形表,并进行迭代计算。

表 2—13

c_j			3	2	2.9	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	300	[8]	2	10	1	0	0	75/2
0	x_5	400	10	5	8	0	1	0	40

c_j			3	2	2.9	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	420	2	13	10	0	0	1	210
c_j-z_j			3	2	2.9	0	0	0	
3	x_1	75/2	1	1/4	5/4	1/8	0	0	150
0	x_5	25	0	[5/2]	−9/2	−5/4	1	0	10
0	x_6	345	0	25/2	15/2	−1/4	0	1	138/5
c_j-z_j			0	5/4	17/20	−3/8	0	0	
3	x_1	35	1	0	17/10	1/4	−1/10	0	350/17
2	x_2	10	0	1	−9/5	−1/2	2/5	0	—
0	x_6	220	0	0	[30]	6	−5	1	22/3
c_j-z_j			0	0	7/5	1/4	−1/2	0	
3	x_1	338/15	1	0	0	−9/100	11/60	−17/300	
2	x_2	116/5	0	1	0	−7/50	1/10	3/50	
2.9	x_3	22/3	0	0	1	1/5	−1/6	1/30	
c_j-z_j			0	0	0	−3/100	−4/15	−7/150	

由表 2−13 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=\left(\frac{338}{15},\frac{116}{5},\frac{22}{3},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=3\times\frac{338}{15}+2\times\frac{116}{5}+2.9\times\frac{22}{3}=\frac{2029}{15}$。

(2)由最终单纯形表知，设备 B 的影子价格为 4/15(千元/台时)，而借用 B 设备的租金为 18/60=0.3>4/15，故借用 B 设备不合算。

(3)设分别生产Ⅳ、Ⅴ产品 x_7，x_8 单位，则 x_7 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_7=B^{-1}P_7=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\5\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{73}{100}\\ -\frac{29}{50}\\ \frac{19}{10}\end{bmatrix}$$

从而 x_7 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_7=c_7-C_BB^{-1}P_7=2.1-(3,2,2.9)\begin{bmatrix}-\frac{73}{100}\\ -\frac{29}{50}\\ \frac{19}{10}\end{bmatrix}=-0.06<0$，故生产Ⅳ产品在经济上不合算。

x_8 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_8=B^{-1}P_8=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{23}{75}\\ \frac{14}{25}\\ \frac{8}{15}\end{bmatrix}$$

从而 x_8 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_8=c_8-C_BB^{-1}P_8=1.87-(3,2,2.9)$

$$\begin{bmatrix}-\frac{23}{75}\\ \frac{14}{25}\\ \frac{8}{15}\end{bmatrix}=0.12>0$$，故生产Ⅴ产品在经济上合算。

把 x_8 的系数列向量加入最终单纯形表，并进行迭代计算。

表 2—14

c_j			3	2	2.9	0	0	0	1.87	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
3	x_1	338/15	1	0	0	−9/100	11/60	−17/300	−23/75	—
2	x_2	116/5	0	1	0	−7/50	1/10	3/50	14/25	290/7
2.9	x_3	22/3	0	0	1	1/5	−1/6	1/30	[8/15]	77/12
c_j-z_j			0	0	0	−3/100	−4/15	−7/150	3/25	
3	x_1	107/4	1	0	23/40	1/40	21/240	−3/80	0	
2	x_2	31/2	0	1	−21/20	−7/20	11/40	1/40	0	
1.87	x_8	55/4	0	0	15/8	3/8	−5/16	1/16	1	
c_j-z_j			0	0	−41/40	−3/40	−73/320	−827/1600	0	

由表 2—14 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(\frac{107}{4},\frac{31}{2},0,0,0,0,0,\frac{55}{4})^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=3\times\frac{107}{4}+2\times\frac{31}{2}+1.87\times\frac{55}{4}=\frac{10957}{80}$。

(4)改进后 $c_1=4.5$，$P_1=(9,12,4)^{\mathrm{T}}$，$x_1$ 在最终单纯形表中的系数列向量

$$P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}-\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300}\\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\12\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{349}{100}\\ \frac{9}{50}\\ -\frac{1}{15}\end{bmatrix}$$

从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=4.5-(3,2,2.9)\begin{bmatrix}\frac{349}{100}\\ \frac{9}{50}\\ -\frac{1}{15}\end{bmatrix}=0.843>0$，故改进后能带来更多的经济效益。

小结　注意与实际问题的结合。

◎2.11　分析下列参数规划中当 t 变化时最优解的变化情况。

(1) $\max z(t)=(3-6t)x_1+(2-2t)x_2+(5-5t)x_3 \quad (t\geqslant 0)$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 430 \\ 3x_1+2x_3\leqslant 460 \\ x_1+4x_2\leqslant 420 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z(t)=(7+2t)x_1+(12+t)x_2+(10-t)x_3 \quad (t\geqslant 0)$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 20 \\ 2x_1+2x_2+x_3\leqslant 30 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max z(t)=2x_1+x_2 \quad (0\leqslant t\leqslant 25)$

$$\begin{cases} x_1\leqslant 10+2t \\ x_1+x_2\leqslant 25-t \\ x_2\leqslant 10+2t \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(4) $\max z(t)=21x_1+12x_2+18x_3+15x_4 \quad (0\leqslant t\leqslant 59)$

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+6x_3+3x_4\leqslant 30+t \\ 6x_1-3x_2+12x_3+6x_4\leqslant 78-t \\ 9x_1+3x_2-6x_3+9x_4\leqslant 135-t \\ x_j\geqslant 0,j=1,2,3,4 \end{cases}$$

分析　本题考查了参数线性规划。

解　(1)在约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5,x_6，即可将此模型化为标准型

$$\max z=(3-6t)x_1+(2-2t)x_2+(5-5t)x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=430 \\ 3x_1+2x_3+x_5=460 \\ x_1+4x_2+x_6=420 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 \end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—15

c_j			3	2	5	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	430
0	x_5	460	3	0	[2]	0	1	0	230
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	—
c_j-z_j			3	2	5	0	0	0	
0	x_4	200	$-1/2$	[2]	0	1	$-1/2$	0	100
5	x_3	230	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	—
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	105
c_j-z_j			$-9/2$	2	0	0	$-5/2$	0	
2	x_2	100	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	
5	x_3	230	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	
0	x_6	20	2	0	0	-2	1	1	
c_j-z_j			-4	0	0	-1	-2	0	

将目标函数的系数的变化直接反映到最终单纯形表中，见表 2—16。

表 2—16

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	100	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	—
$5-5t$	x_3	230	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	460
0	x_6	20	2	0	0	-2	[1]	1	20
c_j-z_j			$t-4$	0	0	$t-1$	$2t-2$	0	

当 $t\leqslant 1$ 时，$\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,3,4,5,6)$，所以最优解 $X^*=(1,100,230,0,0,20)^{\mathrm{T}}$

当 $t>1$ 时，$\sigma_5>\sigma_4>0$，x_5 进基，x_6 出基，见表 2—17。

表 2—17

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	105	$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	—
$5-5t$	x_3	220	$1/2$	0	1	[1]	0	$-1/2$	220
0	x_5	20	2	0	0	-2	1	1	—
c_j-z_j			$-3t$	0	0	$5t-5$	0	$2-2t$	
$2-2t$	x_2	105	$1/4$	1	0	0	0	[1/4]	420
0	x_4	220	$1/2$	0	1	1	0	$-1/2$	—
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	—
c_j-z_j			$\frac{5}{2}-\frac{11}{2}t$	0	$5-5t$	0	0	$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$	
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	
c_j-z_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	

所以，当 $t\geqslant 1$ 时，最优解 $X^*=(0,0,0,430,460,420)^{\mathrm{T}}$

(2)在约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5，即可将此模型化为标准型

$$\max z=(7+2t)x_1+(12+t)x_2+(10-t)x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=20 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_5=30 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—18

c_j			7	12	10	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	1	1	1	1	0	20
0	x_5	30	2	[2]	1	0	1	15
c_j-z_j			7	12	10	0	0	
0	x_4	5	0	0	[1/2]	1	$-1/2$	10
12	x_2	15	1	1	1/2	0	1/2	30
c_j-z_j			-5	0	4	0	-6	
10	x_3	10	0	0	1	2	-1	
12	x_2	10	1	1	0	-1	1	
c_j-z_j			-5	0	0	-8	-2	

将目标函数的系数的变化直接反映到最终单纯形表中，见表 2—19。

表 2—19

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$10-t$	x_3	10	0	0	1	[2]	-1
$12+t$	x_2	10	1	1	0	-1	1
c_j-z_j			$t-5$	0	0	$3t-8$	$-2-2t$

当 $t\leqslant\frac{8}{3}$ 时，$\sigma_j\leqslant 0(j=1,2,3,4,5)$，所以最优解 $X^*=(0,10,10,0,0)^{\mathrm{T}}$

当 $\frac{8}{3}<t\leqslant 5$ 时，$\sigma_4>0$，x_4 进基，x_3 出基，见表 2—20。

表 2—20

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	0	0	1/2	1	$-1/2$
$12+t$	x_2	15	[1]	1	1/2	0	1/2
c_j-z_j			$t-5$	0	$4-\frac{3}{2}t$	0	$-6-\frac{1}{2}t$

所以，当$\frac{8}{3}\leqslant t\leqslant 5$ 时，最优解 $X^*=(0,15,0,5,0)^T$

由表 2—20 可看出，当 $t>5$ 时，$\sigma_1>0$，x_1 进基，x_2 出基，见表 2—21。

表 2—21

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	0	0	1/2	1	$-1/2$
$7+2t$	x_1	15	1	1	1/2	0	1/2
c_j-z_j			0	$5-t$	$\frac{13}{2}-2t$	0	$-\frac{7}{2}t$

所以，当 $t\geqslant 5$ 时，最优解 $X^*=(15,0,0,5,0)^T$

(3)在约束条件中分别加入松弛变量 x_3,x_4,x_5，即可将此模型化为标准型。

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 \quad\quad =10+2t \\ x_1+x_2 \quad\quad +x_4=25-t \\ \quad\quad x_2 \quad +x_5=10+2t \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—22

c_j			2	1	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	10	[1]	0	1	0	0	10
0	x_4	25	1	1	0	1	0	25
0	x_5	10	0	1	0	0	1	—
c_j-z_j			2	1	0	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	—
0	x_4	15	0	1	-1	1	0	15
0	x_5	10	0	[1]	0	0	1	10
c_j-z_j			0	1	-2	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	
0	x_4	5	0	0	-1	1	-1	
1	x_2	10	0	1	0	0	1	
c_j-z_j			0	0	-2	0	-1	

计算

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t\\-t\\2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t\\-t\\2t\end{bmatrix}$$

将计算结果反映到最终表，得表 2—23。

表 2—23

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0
0	x_4	$5-t$	0	0	-1	1	-1
1	x_2	$10+2t$	0	1	0	0	1
c_j-z_j			0	0	-2	0	-1

当 $0\leqslant t\leqslant 5$ 时，上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，所以最优解 $X^*=(10+2t,10+2t,0,5-t,0)^T$

当 $t>5$ 时，$b_2<0$，x_4 出基，x_5 进基，用对偶单纯形法迭代，见表 2—24。

表 2—24

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0
0	x_5	$t-5$	0	0	1	-1	1
1	x_2	$15+t$	0	1	-1	1	0
c_j-z_j			0	0	-1	-1	0

所以，当 $t\geqslant 5$ 时，最优解 $X^*=(10+2t,15+t,0,0,t-5)^T$

(4)在约束条件中分别加入松弛变量 x_5,x_6,x_7，即可将此模型化为标准型

$$\max z(t)=21x_1+12x_2+18x_3+15x_4+0x_5+0x_6+0x_7$$

$$\begin{cases}6x_1+3x_2+6x_3+3x_4+x_5=30+t\\6x_1-3x_2+12x_3+6x_4+x_6=78-t\\9x_1+3x_2-6x_3+9x_4+x_7=135-t\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

令 $t=0$，用单纯形法求解。

表 2—25

c_j			21	12	18	15	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	30	[6]	3	6	3	1	0	0	5
0	x_6	78	6	-3	12	6	0	1	0	13
0	x_7	135	9	3	-6	9	0	0	1	15
c_j-z_j			21	12	18	15	0	0	0	

c_j			21	12	18	15	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
21	x_1	5	1	1/2	1	[1/2]	1/6	0	0	10
0	x_6	48	0	−6	6	3	−1	1	0	16
0	x_7	90	0	−3/2	−15	9/2	−3/2	0	1	20
c_j-z_j			0	3/2	−3	9/2	−7/2	0	0	
15	x_4	10	2	1	2	1	1/3	0	0	
0	x_6	18	−6	−9	0	0	−2	1	0	
0	x_7	45	−9	−6	−24	0	−3	0	1	
c_j-z_j			−9	−3	−12	0	−5	0	0	

计算

$$B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ -t\\ -2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t/3\\ -3t\\ -5t\end{bmatrix}$$

将计算结果反映到最终表，如表 2—26 所示。

表 2—26

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$10+t/3$	2	1	2	1	1/3	0	0
0	x_6	$18-3t$	−6	[−9]	0	0	−2	1	0
0	x_7	$45-5t$	−9	−6	−24	0	−3	0	1
c_j-z_j			−9	−3	−12	0	−5	0	0

当 $0\leqslant t\leqslant 6$ 时，上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，所以最优解 $X^*=(0,0,0,10+\frac{t}{3},0,18-3t,45-5t)^{\mathrm{T}}$

当 $t>6$ 时，$b_2<0$，x_6 出基，x_2 进基，用对偶单纯形法迭代，见表 2—27。

表 2—27

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	12	4/3	0	2	1	1/9	1/9	0
12	x_2	$\frac{t}{3}-2$	2/3	1	0	0	2/9	−1/9	0
0	x_7	$33-3t$	−5	0	[−24]	0	−5/3	−2/3	1
c_j-z_j			−7	0	−12	0	−13/3	−1/3	0

可见，当 $6<t\leqslant 11$ 时，表 2—31 中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，所以最优解

$$X^*=(0,\frac{1}{3}t-2,0,12,0,0,33-3t)^{\mathrm{T}}$$

当 $t>11$ 时，$b_3<0$，x_7 出基，x_3 进基，用对偶单纯形法迭代，见表 2—28。

表 2—28

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$\frac{59}{4}-\frac{t}{4}$	11/12	0	0	1	−1/36	1/18	1/12
12	x_2	$\frac{1}{3}t-2$	2/3	1	0	0	2/9	−1/9	0
18	x_3	$\frac{1}{8}(t-11)$	5/24	0	1	0	5/72	1/36	−1/24
c_j-z_j			−9/2	0	0	0	−7/2	0	−1/2

可见，当 $11<t\leqslant 59$ 时，上表中 $b_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，所以最优解为

$$X^*=\left(0,\frac{1}{3}t-2,\frac{1}{8}(t-11),\frac{59}{4}-\frac{t}{4},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

第三章

运 输 问 题

内容提要

一、运输问题的特点

一般运输问题是要把某种产品(或物资)从若干个产地调运到若干个销地,每个产地的产量、每个销地的销量和产销各地之间的单位运价(或运距)已知,要求确定出使总运输费用最小的运输方案。这类问题可以用以下数学语言描述。

已知有 m 个产地 A_i,其产量分别为 a_i,$i=1,2,\cdots,m$;有 n 个销地 B_j,其销量分别为 b_j,$j=1,2,\cdots,n$;从 A_i 到 B_j 的运输单价为 C_{ij},这些已知数据可以归纳为表 3-1。设 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量,求解表 3-2 中的 x_{ij} 的值,使总运费最小。上述这种形式,可称为表格形式的运输问题模型。

表 3-1　运输问题数据表

运价 / 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产　量
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mn}	a_m
销　量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

表 3-2　运输方案表

运价 / 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产　量
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	a_m
销　量	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j$ / $\sum_{i=1}^{m} a_i$

表中 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 为各产地的产量之和，$\sum_{j=1}^{n} b_j$ 为各销地的销量之和

当 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，即产量 = 销量时，称为产销平衡。

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \text{，即产量} > \text{销量时} \\ \text{当 } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{，即产量} < \text{销量时}\end{array}\right\}\text{统称为产销不平衡}$$

二、表上作业法及其在产销平衡问题中的应用

1. 产销平衡问题与表上作业法

(1) 产销平衡问题的数学模型

具有 m 个产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 n 个销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的运输问题的数学模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\cdots,n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

它包含 $m\times n$ 个变量，$(m+n)$ 个约束方程，其系数矩阵的结构松散，且比较特殊。其系数矩阵为：

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
1 & & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ 行} \end{array}
\end{array}$$

该系数矩阵中对应于变量 x_{ij} 的系数列向量 P_{ij}，其分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个为 1 以外，其余的都为零，即

$$P_{ij}=(0,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}=e_i+e_{m+j}$$

其中 e_i 为第 i 个分量为 1 的单位向量。

对于产销平衡问题有

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

故最多只有 $m+n-1$ 个独立的约束方程，即系数矩阵的秩$\leqslant m+n-1$ 产销平衡问题的基可行解中只有 $m+n-1$ 个基变量，有$(m\times n)-(m+n-1)$个非基变量。

(2)表上作业法。

表上作业法是单纯形法在求解运输问题的一种简化方法。

其计算步骤如下：

① 列出产销平衡表。

② 确定初始基可行解，即在产销平衡表上给出 $m+n-1$ 个数字格，确定初始基可行解一般用最小元素法和伏格尔法。

③ 求各非基变量的检验数，即在表上计算空格的检验数，判别是否达到最优解。如已是最优解，则停止计算，否则转入下一步。

④ 确定换入变量的空格。

⑤ 确定换出变量的空格。

⑥ 沿闭回路调整运输数量 θ

⑦ 重复步骤③－⑥，直至所有空格的检验数 σ_{ij} 均为非负为止，此时便可得到最优方案。

三、产销不平衡运输问题的求解法

对于总产量不等于总需求量的运输问题，不能直接采用表上作业法求最优调运方案，而是将产销不平衡问题转化为产销平衡运输问题，然后再采用表上作业法进行求解。

(1) 产大于销问题

对于此类问题，设有一个假想销地 B_{n+1}，其销量

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j$$

但实际上没有运输，故其单位运价为 0，这样就转化产销平衡问题，但没有破坏原问

题的性质。

（2）销大于产问题

对于此类问题，设有一个假想产地 A_{m+1}，其产量

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$$

但实际上没有运输，故其单位运价为 0，这样就转化为产销平衡问题，但没有破坏原问题的性质。

典型例题与解题技巧

【例 1】 两个水厂 A_1，A_2 将自来水供应三个小区 B_1，B_2，B_3，每天各水厂的供应量与各小区的需求量以及各水厂调到各小区的供水单价见表 3－3，应如何安排供水方案，使总水费最小？

解析分析　在本题中水厂就是“产地”，小区就是“销地”，而且供应量之和＝需求量之和，属产销平衡，其有关数据已用表格给出，可直接用表上作业法求解。

表 3-3

供水单价/元　小区　水厂	B_1	B_2	B_3	供应量/t
A_1	10	6	4	170
A_2	7	5	6	200
需求量/t	160	90	120	370　370

解题过程　n＝3，m＝2，n＋m－1＝4 有 4 个数字格。

用伏格法求出初始方案

表 3-4

运价　销地　产地	B_1	B_2	B_3	行差额	
A_1	10	6	4	2	
A_2	7	5	6	1	③
列差额	3	1	2		
	①		②		

表 3-5

产地 \ 销地 (运量)	B_1	B_2	B_3	产量
A_1		50	120	170
A_2	160	40		200
需求量	160	90	120	370

第一步　分别计算表 3-3 中运价部分的行差额和列差额，得表 3-4。

第二步　在所有差额中第 1 列的差额 3 是最大值，选第 1 列中最小运价 c_{21}，对应表 3-5 的 x_{21}，由 A_2 满足 B_1 的需求，在表 3-5 中(2,1)格中填写 160，A_2 还余 40。由于已满足 B_1 的需求，划去表 3-4 中的第 1 列。

对表 3-4 未划去部分重复第一、二步，直到求出初始方案(表 3-5)。

若存在 2 个(或 2 个以上)最大差额相等的情况，则根据差额所在行(或列)中的最小 c_{ij} 确定 x_{ij}。

【例 2】 判断表 3－6 到表 3－7 中给出的调运方案能否作为用表上作业法求解时的初始解？为什么？

表 3－6

产地 \ 销地	1	2	3	4	产量
1	0	15			15
2	5		15	10	20
3	5	10			15
销量	5	15	15	10	

表 3－7

产地 \ 销地	1	2	3	4	5	产量
1	150			250	50	450
2		200	300			500
3			250	30	50	330
4	90	210				300
5	10			80	20	110
销量	240	410	550	330	70	

解题分析　读者应该熟练掌握应用表上作业法求解产销问题时对变量的要求，以及表上数字格的含义。

解题过程　表 3－6 中，有 7 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=3+4-1=6$ 个，所以不能作为初始解。

表 3－7 中，有 13 个数字格，而作为初始解，应用 $m+n-1=5+5-1=9$ 个，所以不能作为初始解。

历年考研真题评析

【题 1】 (2005 年浙江大学)已知某运输问题的产销需求及单位运价如表 3－8 所示。

表 3－8

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	5	9	3	15
A_2	1	3	4	18
A_3	8	2	6	17
销　量	18	12	16	

求解运费最少的运输方案和总运价。

解题分析　本题是一典型的且较简单的运输问题。

解题过程　$A_1 \rightarrow B_3(15)$；$A_2 \rightarrow B_1(18)$；$A_3 \rightarrow B_2(12)$，$B_3(1)$，$B_4(4)$

最优方案不惟一，因为有空格 $\sigma_{33}=0$。

总费用 93。

【题 2】 (2006 年北京大学)某房地产公司计划在一住宅小区建设 5 栋不同类型的楼房 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5。由三家建筑公司 A_1，A_2，A_3 进行投标，允许每家建筑公司可承建 1～2 栋楼，经过投标得出建筑公司 A_i 对新楼 B_j 的预算费用 C_{ij} 见表 3－9，求使总费用最少的分派方案。

表 3－9

	B_1	B_3	B_3	B_4	B_5
A_1	3	8	7	15	11
A_2	7	9	10	14	12
A_3	6	9	13	12	7

解题分析　转化成运输问题再进行求解即可。

解题过程　A_1 承建 B_1 和 B_3 楼；

A_2 承建 B_2 楼；

A_3 承建 B_4 和 B_5 楼。

课后习题全解

○ **3.1** 判断表 3—10 和 3—11 中给出的调运方案能否作为用表上作业法求解时的初始解？为什么？

表 3—10

销地 / 产地	1	2	3	4	产量
1	0	15			15
2			15	10	25
3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 3—11

销地 / 产地	1	2	3	4	5	产量
1	150			250		400
2		200	300			500
3			250		50	300
4	90	210				300
5				80	20	100
销量	240	410	550	330	70	

解 表 3—10 中有 5 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=3+4-1=6$ 个数字格，所以给出的调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

表 3—11 中有 10 个数字格，而作为初始解，应有 $m+n-1=5+5-1=9$ 个数字格，所以给出调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

◎**3.2** 表 3—12 和表 3—13 分别给出两个运输问题的产销平衡表和单位运价表，试用伏格尔(Vogel)法直接给出近似最优解。

表 3—12

销地 / 产地	1	2	3	产量
1	5	1	8	12
2	2	4	1	14
3	3	6	7	4
销量	9	10	11	

表 3－13

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1	10	2	3	15	9	25
2	5	10	15	2	4	30
3	15	5	14	7	15	20
4	20	15	13	M	8	30
销量	20	20	30	10	25	

分析　本题考查了伏格尔法。

解　解表 3－12：第一步：分别计算表 3－12 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表 3－14。

表 3－14

产地＼销地	1	2	3	行差额
1	5	1	8	4
2	2	4	1	1
3	3	6	7	3
列差额	1	3	6	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表 3 中，第 3 列是最大差额所在列，第 3 列中的最小元素为 1，可确定产地 2 的产品先供应给销地 3，得表 3－15 同时将运价表中第 3 列数字划去，如表 3－16 所示。

表 3－15

产地＼销地	1	2	3	产量
1				12
2			11	14
3				4
销量	9	10	11	

表 3－16

产地＼销地	1	2	3	产量
1	5	1	8	12
2	2	4	1	14
3	3	6	7	4
销量	9	10	11	

第三步：对表3－16中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出表1的初始解如表3－17所示。

表3－17

产地＼销地	1	2	3	产量
1	2	10		12
2	3		11	14
3	4			4
销量	9	10	11	

解 解表3－13：第一步：分别计算表3－13中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表3－18

表3－18

产地＼销地	1	2	3	4	5	行差额
1	10	2	3	15	9	1
2	5	10	15	2	4	2
3	15	5	14	7	15	2
4	20	15	13	M	8	5
列差额	5	3	10	5	5	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表3－18中，第3列是最大差额所在列，第3列中的最小元素为3，可确定产地1的产品先供应给销地3，得表3－19，同时将运价表中第1行数字划去，如表3－20所示。

表3－19

产地＼销地	1	2	3	4	5	产量
1			25			25
2						30
3						20
4						30
销量	20	20	30	10	25	

表 3—20

销地 产地	1	2	3	4	5	产量
1	10	2	3	15	9	25
2	5	10	15	2	4	30
3	15	5	14	7	15	20
4	20	15	13	M	8	30
销量	20	20	30	10	25	

第三步：对表 3—20 中未划去的元素再分别计算出各行各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出表 3—13 的初始解如表 3—21 所示。

表 3—21

销地 产地	1	2	3	4	5	产量
1			25			25
2	20			10		30
3		20	0	0		20
4			5		25	30
销量	20	20	30	10	25	

◎3.3　用表上作业法求表 3—22 到表 3—25 中给出的运输问题的最优解（表中数字 M 为任意大正数）。

表 3—22

销地 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

表 3－23

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	10	6	7	12	4
2	16	10	5	9	9
3	5	4	10	10	4
销量	5	2	4	6	

表 3－24

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	20	5	9	10	5
2	2	10	8	30	6	6
3	1	20	7	10	4	2
4	8	6	3	7	5	9
销量	4	4	6	2	4	

表 3－25

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	18	29	13	22	100
2	13	M	21	14	16	120
3	0	6	11	3	M	140
4	9	11	23	18	19	80
5	24	28	36	30	34	60
销量	100	120	100	60	80	

分析 本题考查了表上作业法，可先利用伏格尔法求出初始解，再利用位势法进行检验。

解 解表 3－22：利用伏格尔法求出初始解。

第一步：分别计算表 3－22 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，见表 3－26。

表 3－26

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	列差额
1	3	7	6	4	1
2	2	4	3	2	0
3	4	3	8	5	1
列差额	1	1	3	2	

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。在表 3－26 中，丙列是最大差额所在列，丙列中的最小元素为 3，可确定产地 2 的产品先供应给销地丙，因为产地 2 的产量等于销地丙的销量，所以在(2，丁)处填入一个 0，得表 3－27并同时将运价表中丙列数字和第二行数字划去，如表 3－28 所示。

表 3－27

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1					5
2			2	0	2
3					3
销量	3	3	2	2	

表 3－28

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

第三步：对表 3－28 中未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差、额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。用此法给出表 3－22 的初始解如表 3－29 所示。

表 3－29

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0		2	5
2			2	0	2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

利用位势法进行检验。

第一步:在对应表 3－29 的数字格处填入单位运价,见表 3－30。

表 3－30

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁
1	3	7		4
2			3	2
3		3		

第二步:在表 3－30 上增加一行一列,在列中填入 u_i,在行中填入 v_i,得表 3－31。

表 3－31

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	u_i
1	3	7		4	0
2			3	2	－2
3		3			－4
v_j	3	7	5	4	

先令 $u_1=0$,然后按 $u_i+v_j=c_{ij}$,$i,j\in B$ 相继地确定 u_i,v_j 由表 3－31 可见,当 $u_1=0$ 时,由 $u_1+v_1=3$ 可得 $v_1=3$;由 $u_1+v_2=7$ 可得 $v_2=7$;由 $u_1+v_4=4$ 可得 $v_4=4$;由 $v_2=7$,$u_3+v_2=3$ 可得 $u_3=-4$;由 $v_4=4$,$u_2+v_4=2$ 可得 $u_2=-2$;由 $u_2=-2$,$u_2+v_3=3$ 可得 $v_3=5$

第三步:按 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$,$i,j\in N$ 计算所有空格的检验数,如表 3－32 所示。

表 3－32

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	u_i
1	3 0	7 0	6 1	4 0	0
2	2 1	4 －1	3 0	2 0	－2
3	4 5	3 0	8 7	5 5	－4
v_j	3	7	5	4	

$\sigma_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=2-(-2+3)=1$,$\sigma_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=4-(-4+3)=5$

$\sigma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=4-(-2+7)=-1$,$\sigma_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=6-(0+5)=1$

$\sigma_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=8-(-4+5)=7$,$\sigma_{34}=c_{34}-(u_3+v_4)=5-(-4+4)=5$

在表 3－32 中还有负检验数,说明未得到最优解,可以利用闭回路调整法加以改进。

由表 3－32 得(2,乙)为调入格,以此格为出发点,作一闭回路,如表 3－33 所示。

表 3－33

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0(－1)		2(＋1)	5
2		0(＋1)	2	0(－1)	2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

(2,乙)格的调入量 θ 是选择闭回路上具有(－1)的数字格中的最小者,即 $\theta = \min\{0,0\}$,然后按照闭回路上的正、负号,加上和减去此值,得到调整方案,如表 3－34 所示。

表 3－34

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	0		2	5
2		0	2		2
3		3			3
销量	3	3	2	2	

对表 3－34 给出的解,再用位势法求各空格的检验数,如表 3－35 所示。所有检验数都非负,故表 3－34 中的解为最优解。这时得到的总运费最少,为 32 由于表 3－35 中(1,丙)格的检验数为 0,故该运输问题有无穷多最优解。

表 3－35

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	u_i
1			0		0
2	2			1	－3
3	5		6	5	－4
v_j	3	7	6	4	

解表 3－23:利用伏格尔法求出初始解。步骤和过程参考解表 3－22。

第一步:分别计算表 3－23 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行。

第二步:从行或列差额中选出最大者,选择它所在行或列中的最小元素。

第三步:对未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额,并填入该表的最右列和最下行,重复第一、二步,直到给出初始解为止。

最后再利用位势法检验。

解表 3－24:表 3－33 是产销不平衡的运输问题,所以增加一个假想销地已,并令其运价为 0,其销量为 5＋6＋2＋9－(4＋4＋6＋2＋4)＝2,见表 3－36。

表 3－36

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	巳	产量
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	6
3	1	20	7	10	4	0	2
4	8	6	3	7	5	0	9
销量	4	4	6	2	4	2	

利用伏格尔法求出初始解。

第一步：分别计算表 3－36 中各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

第二步：从行或列差额中选出最大者，选择它所在行或列中的最小元素。

第三步：对未划去的元素再分别计算出各行、各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行，重复第一、二步，直到给出初始解为止。

最后利用位势法进行检验。

所有检验数都非负，故解为最优解。这时得到的总运费最少，为 90。故该运输问题有无穷多最优解。

解表 3－25：表 3－25 是产销不平衡的运输问题，所以增加一个假想销地巳，并令其运价为 0，其销量为 100＋120＋140＋80＋60－(100＋120＋100＋60＋80)＝40，步骤和解题过程参考解表 3－24。

对给出的解，再用位势法求各空格的检验数。

所有检验数都非负，故解为最优解，这时得到的总运费最少，为 5520。由于检验数为 0，故该运输问题有无穷多最优解。

○ **3.4** 已知运输问题的产销平衡表、单位运价表及最优调运方案分别见表 3－37 和表 3－38，试回答下列问题。

表 3－37 产销平衡表及最优调运方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5		10	15
A_2	0	10	15		25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 3—38 单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	1	20	11
A_2	12	7	9	20
A_3	2	14	16	18

(1) 从 $A_2 \to B_2$ 的单位运价 c_{22} 在什么范围变化时，上述最优调运方案不变？

(2) $A_2 \to B_4$ 的单位运价 c_{24} 变为何值时，有无穷多最优调运方案。除表 3—37 中方案外，至少再写出其他两个。

解 (1) 以单位运价表计算的基变量检验数为 0 且非基变量检验数非负时，调运方案不变。假定 c_{22} 未知，对表 3—37 给出的最优调运方案，用位势法求各空格的检验数，如表 3—39 所示。

表 3—39

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	10 $c_{22}-3$	1 0	20 $10+c_{22}$	11 0	0
A_2	12 0	c_{22} 0	9 0	20 $10-c_{22}$	$c_{22}-1$
A_3	2 0	14 $24-c_{22}$	16 17	18 $18-c_{22}$	$c_{22}-11$
v_j	$13-c_{22}$	1	$10-c_{22}$	11	

欲使所有非基变量的检验数非负，则有

$$\begin{cases} c_{22}-3 \geqslant 0 \\ 10+c_{22} \geqslant 0 \\ 10-c_{22} \geqslant 0 \\ 24-c_{22} \geqslant 0 \\ 18-c_{22} \geqslant 0 \end{cases}$$

解之得 $3 \leqslant c_{22} \leqslant 10$ 所以 $A_2 \to B_2$ 的单位运价 c_{22} 在 3 与 10 之间变化时，上述最优调运方案不变。

(2)当存在某非基变量的检验数为 0 时，有无穷多最优解．假定 c_{24} 未知，对表 3—37 给出的最优调运方案，用位势法求各空格的检验数，如表 3—40 所示。

表 3－40

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	10 4	1 0	20 17	11 0	0
A_2	12 0	c_{22} 0	9 0	c_{24} c_4-17	6
A_3	2 0	14 17	16 17	18 11	-4
v_j	6	1	3	11	

由 $c_{24}-17=0$ 可得 $c_{24}=17$ 所以当 $A_2 \to B_4$ 的单位运价 c_{24} 变为 17 时，有无穷多最优调运方案。把(A_2,B_4)作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路。

调入量分别取 5，10，即可得两个最优调运方案。

◎**3.5** 某百货公司去外地采购 A、B、C、D 四种规格的服装，数量分别为：A—1500 套，B—2000 套，C—3000 套，D—3500 套。有三个城市可供应上述规格服装，各城市供应数量分别为：Ⅰ—2500 套，Ⅱ—2500 套，Ⅲ—5000 套。由于这些城市的服装质量、运价和销售情况不同，预计售出后的利润(元/套)也不同，详见表 3－41。请帮助该公司确定一个预期盈利最大的采购方案。

表 3－41

	A	B	C	D
Ⅰ	10	5	6	7
Ⅱ	8	2	7	6
Ⅲ	9	3	4	8

分析 将原问题转化为运输问题后，即可用表上作业法求解。

解 用 10 减去利润表上的数字，使之变成一个运输问题，如表 3－42 所示。

表 3－42

产 地＼销 地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	0	5	4	3	2500
Ⅱ	2	8	3	4	2500
Ⅲ	1	7	6	2	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3－43 所示。

表 3—43

销地 产地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	1500	500	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ		1500		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

用位势法求各空格的检验数，如表 3—44 所示。

表 3—44

销地 产地	A	B	C	D	u_i
Ⅰ	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 3	0
Ⅱ	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{4}$ 5	—1
Ⅲ	$\boxed{1}$ —1	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{2}$ 0	2
v_j	0	5	4	0	

表 3—44 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整。把（Ⅲ，A）格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3—45 所示。

表 3—45

销地 产地	A	B	C	D	产量
Ⅰ	1500（—1）	500（+1）	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ	（+1）	1500（—1）		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

（Ⅲ，A）格的调入量 θ 是选择闭回路上具有（—1）的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1500,1500\}=1500$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表 3—46 所示。

表 3—46

销地 产地	A	B	C	D	产量
Ⅰ		2000	500		2500
Ⅱ			2500		2500
Ⅲ	1500	0		3500	5000
销量	1500	2000	3000	3500	

用位势法求各空格的检验数。

所有非基变量的检验数均为非负，故解为最优解。按照此种方案调运，可得最大盈利 72000 元。

3.6 甲、乙、丙三个城市每年需要煤炭分别为：320、250、350 万吨，由 A、B 两处煤矿负责供应。已知煤炭年供应量分别为：A—400 万吨，B—450 万吨。由煤矿至各城市的单位运价(万元/万吨)见表 3－47。由于需大于供，经研究平衡决定，甲城市供应量可减少 0～30 万吨，乙城市需要量应全部满足，丙城市供应量不少于 270 万吨。试求将供应量分配完又使总运费为最低的调运方案。

表 3－47

	甲	乙	丙
A	15	18	22
B	21	25	16

解 甲、乙、丙三个城市每年的煤炭总需求量为：320＋250＋350＝920 万吨，A、B 两处煤矿年煤炭总供应量为：400＋450＝850 万吨。虚拟一个 C 煤矿，其供应量为 70 万吨，其单位运价如表 3－48 所示。

表 3－48

	甲	甲	乙	丙	丙	供应
A	15	15	18	22	22	400
B	21	21	25	16	16	450
C	M	0	M	M	0	70
需求	290	30	250	270	80	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3－49 所示。

表 3－49

	甲	甲	乙	丙	丙	供应
A	150		250			400
B	140			270	40	450
C		30			40	70
需求	290	30	250	270	80	

用位势法求各非基变量的检验数，如表 3－50 所示。

表 3－50

	甲	甲	乙	丙	丙	u_i
A	$\boxed{15}$ 0	$\boxed{15}$ 5	$\boxed{18}$ 0	$\boxed{22}$ 12	$\boxed{22}$ 12	0
B	$\boxed{21}$ 0	$\boxed{21}$ 5	$\boxed{25}$ 1	$\boxed{16}$ 0	$\boxed{16}$ 0	6
C	$\boxed{M}$ $M-5$	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{M}$ $M-8$	$\boxed{M}$ M	$\boxed{0}$ 0	-10
v_j	15	10	18	10	10	

表 3－50 中所有非基变量的检验数均为非负，故表 3－49 的解为最优解。按照此种方案调运运费最少，为 14650 万元。

◎3.7 某造船厂根据合同要从当年起连续三年末各提供三条规格型号相同的大型客货轮。已知该厂这三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本如表 3－51 所示。

已知加班生产时，每艘客货轮成本比正常生产时高出 70 万元。又知造出来的客货轮如当年不交货，每艘每积压一年造成积压损失为 40 万元。在签订合同时，该厂已储存了两艘客货轮，而该厂希望在第三年末完成合同后还能储存一艘备用。问该厂应如何安排每年客货轮的生产量，使在满足上述各项要求的情况下，总的生产费用加积压损失为最少？

表 3－51

年度	正常生产时间内可完成的客货轮数	加班生产时间内可完成的客货轮数	正常生产时每艘成本（万元）
1	2	3	500
2	4	2	600
3	1	3	550

分析 先画出这问题的产销平衡表和单位造价表，利用伏格尔法求出初始解，用位势法进行检验，闭回路法作调整。

解 以 x_{ij} 表示第 i 年度生产用于第 j 年度交货的船数，I_i 表示第 i 年度可供货的船，列出产销平衡及单位造价表，如表 3－52 所示。

表 3－52

	1	2	3	4	产量
I_0	40	80	120	0	2
I_1	500	540	580	0	2
I_2	570	610	650	0	3
II_1	M	600	640	0	4

	1	2	3	4	产量
Ⅱ$_2$	M	670	710	0	2
Ⅲ$_1$	M	M	550	0	1
Ⅲ$_2$	M	M	620	0	3
需求	3	3	4	7	

利用伏格尔法求出初始解，如表 3—53 所示。

表 3—53

	1	2	3	4	产量
Ⅰ$_0$	2		0		2
Ⅰ$_1$		2			2
Ⅰ$_2$	1	1		1	3
Ⅱ$_1$				4	4
Ⅱ$_2$				2	2
Ⅲ$_1$			1		1
Ⅲ$_2$			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各非基变量的检验数，如表 3—54 所示。

表 3—54

	1	2	3	4	u_i
Ⅰ$_0$	40 0	540 0	120 0	0 530	0
Ⅰ$_1$	500 0	610 0	580 0	0 70	460
Ⅰ$_2$	570 0	600 0	650 0	0 0	530
Ⅱ$_1$	M $M-570$	610 -10	640 -10	0 0	530
Ⅱ$_2$	M $M-570$	670 60	710 60	0 0	530
Ⅲ$_1$	M $M-470$	M $M-510$	550 0	0 100	430
Ⅲ$_2$	M $M-540$	M $M-580$	620 0	0 30	500

	1	2	3	4	u_i
v_j	40	80	120	−530	

表 3—54 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整，把（II_1，2）格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3—55 所示。

表 3—55

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
I_2	1	1(−1)		1(+1)	3
II_1		(+1)		4(−1)	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

（II_1，2）格的调入量 θ 是选择闭回路上具有（−1）的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1,4\}=1$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表 3—56 所示。

表 3—56

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1		2			2
I_2	1			2	3
II_1		1		3	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各空格的检验数，如表 3—57 所示。

表 3—57

	1	2	3	4	u_i
I_0	40 0	80 10	120 0	0 530	0
I_1	500 —10	540 0	580 —10	0 60	470
I_2	570 0	610 10	650 0	0 0	530
II_1	M $M-570$	600 0	640 —10	0 0	530
II_2	M $M-570$	670 70	710 60	0 0	530
III_1	M $M-470$	M $M-500$	550 0	0 100	430
III_2	M $M-540$	M $M-570$	620 0	0 30	500
v_j	40	70	120	—530	

表 3—57 中还有非基变量的检验数小于 0，利用闭回路法进行调整，把(I_1,1)格作为调入格，以此格为出发点，作一闭回路，如表 3—58 所示。

表 3—58

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1	(+1)	2(—1)			2
I_2	1(—1)			2(+1)	3
II_1		1(+1)		3(—1)	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

(I_1,1)格的调入量 θ 是选择闭回路上具有(—1)的数字格中的最小者，即 $\theta=\min\{1,2,3\}=1$，然后按照闭回路上的正、负号，加上和减去此值，得到调整方案，如表

3－59所示。

表 3－59

	1	2	3	4	产量
I_0	2		0		2
I_1	1	1			2
I_2				3	3
II_1		2		2	4
II_2				2	2
III_1			1		1
III_2			3		3
需求	3	3	4	7	

用位势法求各空格的检验数。

所有非基变量的检验数均为非负，故表 3－59 的解为最优解。按照此种方案调运，费用最小，为 4730 万元。

第四章

目 标 规 划

内容提要

一、目标规划的定义

针对线性规划目标单一的局限性，而提出了目标规划的方法。目标规划是线性规划的应用拓展，是解决实际问题的一种方法。与传统的方法不同，它强调了系统性，其方法在于寻找一个“尽可能”满足所有目标的解，而不是绝对满足这些目标的值。

解决目标规划问题首先要根据目标的重要性，分清主次先后、轻重缓急，引入偏差变量，将目标按等级转化为目标约束，最终形成可用线性规划方法解决的问题。

1. 目标规划的分类

目标规划包括线性目标规划、非线性目标规划、整数线性目标规划和整数非线性目标规划等，本书重点讨论线性目标规划。

2. 目标规划与线性规划相比的优点

(1) 线性规划只能处理一个目标，而且目标规划能统筹兼顾处理多种目标的关系，求得更切实际要求的解；

(2) 线性规划立足于满足所有约束条件的可行解，而在实际问题中可能存在相互矛盾的约束条件；目标规划可以在相互矛盾的约束条件下找到满意解，即满意方案；

(3) 目标规划找到的最优解是指尽可能地达到或接近一个或若干个已给定的指标值；

(4) 线性规划的约束条件是不分主次地同等对待的，而目标规划可根据实际需要给予轻重缓急的考虑。

二、目标规划的转换建模技巧

建模步骤：

1. 列出全部的约束条件；
2. 把要达到指标的约束不等式加上正、负偏差变量后，化为目标约束等式；
3. 对目标赋予相应的优先因子；
4. 对同一级优先因子中的各偏差变量，若重要程度不同时，可(根据题意)赋予不同的加权系数；
5. 构造一个按优先因子及加权系数和对应的目标偏差量所要实现最小化的目标函数。

三、目标规划的解法

1. 图解法

图解法简单直观，适于求解只有两个决策变量的问题，目标规划与线性规划不同，它一般是寻求一个区域，这个区间提供了相互矛盾的目标集的折衷方案。

图解法的基本步骤：

(1) 令各偏差变量为 0，作出所有的约束直线；

(2) 作图表示偏差变量增加对约束直线的影响；

(3) 确定满足第一优先级目标集的最优解空间(不考虑其它优先级)；

(4) 转到第 $k+1$ 优先级，求出其相应的最优解空间；

(5) 令 $k=k+1$，反复执行步骤(4)，直到所有优先级均求解完毕。

2. 单纯形法

(1) 与线性规划相比，线性目标规划有自己的基本特点，但只要稍加处理，也可用单纯形法求解，目标规划的基本特点是：具有多个目标函数，且它们分属于不同的优先级。因此，其各级目标函数的系数中，各非基变量的检验数中都含有优先因子，即

$$c_j-g_j=\sum_{k=1}^{K}a_{kj}\cdot p_k,j=1,2,\cdots,n,$$

故各检验数的正、负首先取决于 p_1 的系数 a_{1j} 的正、负；若 $a_{1j}=0$，则检验数的正、负取决于 p_2 的系数 a_{2j} 的正、负，…，依此类推。若 $a_{1j}>0$，则因 $p_1\gg p_2\gg\cdots\gg p_k$ 则必有 $(c_j-z_j)>0$。

基于上述基本特点，在求解线性目标规划的单纯形法中，把每个检验数按 K 级优先因子分解成 K 项，在单纯形表中依次成 K 行。进行最优性检验时，先根据各非基变量检验数中 p_1 项的系数判断 p_1 级目标函数是否已达到最优，若是，则再考虑 p_2 级目标函数的优化，且在 p_2 级目标函数优化的过程必须保证已求出的 p_1 级目标函数最优值不被劣化，…，依此类推。

(2) 求解步骤：

① 建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别排成 k 行，置 $k=1$；

② 检查该行中是否存在负数，且对应的前 $k-1$ 行的系数为 0；若有，取其中最小者对应的变量为换入变量，转步③；若无，则转步⑤。

③ 按最小比值法则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量。

④ 按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回步②。

⑤ 当 $k=K$ 时，计算停止，表中的解即为满意解；否则，置 $K=k+1$，返回步②。

典型例题与解题技巧

【例 1】 已知某实际问题的线性规划模型为：

$$\max z=100x_1+50x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}10x_1+16x_2\leqslant 200 & \text{（资源 1）}\\ 11x_1+3x_2\geqslant 25 & \text{（资源 2）}\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

假定重新确定这个问题的目标为：

P_1：Z 的值应不低于 1 900；

P_2：资源 1 必须全部利用。

将此问题转换为目标规划问题，列出数学模型。

解题分析 这是将线性规划模型转化为目标规划模型的典型例子。首先以优先因子开始，将约束进行标准化（用偏差变量），注意，此时要加上 $d_1^- - d_1^+$ 以保证方程组的完整性（多一个变量对单纯形并没有太多的障碍）。注意在确定 $P_1d_1^-$ 时，因为 z 的值 $\geqslant$1 900，即偏差变量 d_1^- 应尽可能的小。

解题过程 根据题意，以优先因子为序，列对应关系：

优先因子	约束转换	min f=目标值偏差
P_1：	$100x_1+50x_2\geqslant 1\,900\to 100x_1+50x_2+d_1^- -d_1^+=1\,900$	$P_1d_1^-$
P_2：	$10x_1+16x_2\leqslant 200\to 10x_1+16x_2+d_2^- -d_2^+=200$	$P_2d_2^-$
无级别：	$11x_1+3x_2\geqslant 25\to 11x_1+3x_2-x_3=25$	

转化后的模型为：

$$\min f=P_1d_1^-+P_2d_2^-$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}100x_1+50x_2+d_1^- -d_1^+=1\,900\\ 10x_1+16x_2+d_1^- -d_2^+=200\\ 11x_1+3x_2-x_3=25\\ x_i\geqslant 0,d_i^{\pm}\geqslant 0(i=1,2),x_3\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2】 友谊农场有 3 万亩（每亩等于 666.66 平方米）农田，欲种植玉米、大豆和小麦三种农作物。各种作物每亩需施化肥分别为 0.12、0.20、0.15 t。预计秋后玉米每亩可收获 500kg，售价为 0.24 元/kg，大豆每亩可收获 200kg，售价为 1.20 元/kg，小麦每亩可收获 300kg，售价为 0.70 元/kg。农场年初规划时考虑如下几个方面：

p_1：年终收益不低于 350 万元；

p_2：总产量不低于 1.25 万 t；

p_3：小麦产量以 0.5 万 t 为宜；

p_4：大豆产量不少于 0.2 万 t；

p_5:玉米产量不超过 0.6 万 t;

p_6:农场现能提供 5 000t 化肥;若不够,可在市场高价购买,但希望高价采购量愈少愈好。

试就该农场生产计划建立数学模型。

解题分析 此题是多目标规划在实际中的很好的实例。

解题过程 设种植玉米 x_1 亩,大豆 x_2 亩,小麦 x_3 亩,则该问题的数学模型为:

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3(d_3^- + d_3^+) + p_4 d_4^+ + p_5 d_5^+ + p_6 d_6^+$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3\times 10^4 \\ 120x_1 + 240x_2 + 245x_3 + d_1^- - d_1^+ = 350\times 10^4 \\ 1\ 000x_1 + 400x_2 + 700x_3 + d_2^- - d_2^+ = 2\ 500\times 10^4 \\ 700x_3 + d_3^- - d_3^+ = 1\ 000\times 10^4 \\ 400x_2 + d_4^- - d_4^+ = 400\times 10^4 \\ 1\ 000x_1 + d_5^- - d_5^+ = 1\ 200\times 10^4 \\ 0.12x_1 + 0.20x_2 + 0.15x_3 + d_6^- - d_6^+ = 5\ 000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 (i=1,\cdots,6) \end{cases}$$

课后习题全解

○ **4.1** 若用以下表达式作为目标规划的目标函数,试述其逻辑是否正确?

(1) $\max z = d^- + d^+$　　(2) $\max z = d^- - d^+$

(3) $\min z = d^- + d^+$　　(4) $\min z = d^- - d^+$

解 (1) 不正确。

要求 $\max z = d^- + d^+$,而 $d^- \times d^+ = 0$,即求 d^- 或 d^+ 最大,而 d^- 表示决策值未达到目标值的部分,d^+ 表示决策值超过目标值的部分。

故求 $\max z = d^- + d^+$ 无实际意义。

(2) 正确。

要求 $\max z = d^- - d^+$,而 $d^- \times d^+ = 0$,则 $d^+ = 0$,$d^- > 0$,即表示未达到目标值越大越好。

(3) 正确。

要求 $\min z = d^- + d^+$,即正、负偏差变量都要尽可能地小。而 $d^- \times d^+ = 0$,则 $d^+ = d^- = 0$,即恰好达到目标值。

(4) 正确。

要求 $\min z = d^- - d^+$,而 $d^- \times d^+ = 0$,则 $d^- = 0$,$d^+ > 0$,即表示超过目标值越大越好。

○ **4.2** 用图解法找出以下目标规划问题的满意解。

(1) $$\min z=P_1(d_1^-+d_1^+)+P_2(2d_2^++d_3^+)$$

$$\begin{cases} x_1-10x_2+d_1^--d_1^+=50 \\ 3x_1+5x_2+d_2^--d_2^+=20 \\ 8x_1+6x_2+d_3^--d_3^+=100 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3 \end{cases}$$

(2) $$\min z=P_1(d_3^++d_4^+)+P_2d_1^++P_3d_2^-+P_4(d_3^-+1.5d_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^--d_1^+=40 \\ x_1+x_2+d_2^--d_2^+=100 \\ x_1+d_3^--d_3^+=30 \\ x_2+d_4^--d_4^+=15 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3,4 \end{cases}$$

(3) $$\min z=P_1(d_1^-+d_1^+)+P_2d_2^-+P_3d_3^+$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^--d_1^+=10 \\ 3x_1+4x_2+d_2^--d_2^+=50 \\ 8x_1+10x_2+d_3^--d_3^+=300 \\ x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0,i=1,2,3 \end{cases}$$

解 (1) 由约束条件作图 4-1。

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现,在目标函数中要求实现

$$\min (d_1^-+d_1^+)$$

从图中可以看出:

当 x_1,x_2 在射线 $x_1-10x_2=50$ 且 $x_2\geqslant 0$ 上取值,可以满足 $d_1^-=0$ 和 $d_1^+=0$。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现,在目标函数中要求实现

$$\min (2d_2^++d_3^+)$$

因 d_2^+ 的权系数大于 d_3^+ 的权系数,由图可知,D 点为满意解,D 点坐标为(50,0)

图 4-1 图 4-2

(2) 由约束条件作图 4-2。

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ (d_3^+ + d_4^+)$$

从图中可以看出：可以满足 $d_3^+ = 0$ 和 $d_4^+ = 0$。

此时 x_1, x_2 在区域 $OAGFO$ 内取值。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ d_1^+$$

从图中可以看出：可以满足 $d_1^+ = 0$。

此时 x_1, x_2 在区域 $OAHIFO$ 内取值。

再考虑 P_3 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ d_2^-$$

从图中可以看出：当 x_1, x_2 在线段 HI 上取值时，可以使 d_2^- 取最小。

最后考虑 P_4 优先因子的目标的实现。因 d_4^- 的权系数大于 d_3^- 的权系数，故先考虑 d_4^- 取最小。

从图中可以看出：可以满足 $d_4^- = 0$。

此时得到 H 为满意解，H 点坐标为(25,15)。

(3) 由约束条件作图 4－3。

图 4－3

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现，在目标函数中要求实现

$$\min\ (d_1^- + d_1^+)$$

从图中可以看出：可以满足 $d_1^- = 0$ 和 $d_1^+ = 0$。

此时 x_1, x_2 在线段 AF 上取值。

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现。在目标函数中要求实现

$$\min\ d_2^-$$

从图中可以看出：F 点满足 d_2^- 最小。

故 F 为满意解，F 点坐标为(10,0)。

◎4.3 用单纯形法求解以下目标规划问题的满意解。

(1)
$$\min z=P_1d_2^+ + P_1d_2^- + P_2d_1^-$$
$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ 10x_1+12x_2+d_2^- - d_2^+ = 62.4 \\ 2x_1+x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i=1,2 \end{cases}$$

(2)
$$\min z=P_1d_1^- + P_2d_2^+ + P_3(5d_3^- + 3d_4^-) + P_4d_1^+$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^- - d_1^+ = 80 \\ x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 90 \\ x_1+d_3^- - d_3^+ = 70 \\ x_2+d_4^- - d_4^+ = 45 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i=1,2,3,4 \end{cases}$$

(3)
$$\min z=P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2d_3^-$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1 \\ 2x_1+2x_2+d_2^- - d_2^+ = 4 \\ 6x_1-4x_2+d_3^- - d_3^+ = 50 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

分析 本题考查解目标规划的单纯形法。

解 (1) 将上述目标规划问题化为如下形式：

$$\min z=P_1d_2^+ + P_1d_2^- + P_2d_1^-$$
$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ 10x_1+12x_2+d_2^- - d_2^+ = 62.4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

其中 x_3 为松弛变量。

对于此问题用单纯形法进行计算，见表 4—1。

表 4—1

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
P_2	d_1^-	10	1	[2]	0	1	−1	0	0	5
P_1	d_2^-	62.4	10	12	0	0	0	1	−1	5.2
0	x_3	8	2	1	1	0	0	0	0	8
	P_1		−10	−12	0	0	0	0	2	
	P_2		−1	−2	0	0	1	0	0	
0	x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	—
P_1	d_2^-	2.4	4	0	0	−6	[6]	1	−1	0.4

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
0	x_3	3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	6
	P_1		-4	0	0	6	-6	0	2	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	
0	x_2	5.2	$\frac{5}{6}$	1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	6.24
0	d_1^+	0.4	$[\frac{2}{3}]$	0	0	-1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0.6
0	x_3	2.8	$\frac{7}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	2.4
	P_1		0	0	0	0	0	1	1	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	

由表 4－1 可得 $x_1=0,x_2=5.2$ 为原问题的满意解。

而非基变量 x_1 的检验数为 0，故原问题存在多重解。

在表 4－1 的基础上以 x_1 为换入变量，d_1^+ 为换出变量再迭代一步，得表 4－2。

表 4－2

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
0	x_2	4.7	0	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
0	x_1	0.6	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
0	x_3	2.1	0	0	1	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	
	P_1		0	0	0	0	0	1	1	
	P_2		0	0	0	1	0	0	0	

由表 4－2 可得 $x_1=0.6,x_2=4.7$ 也为满意解。

由线性规划的性质可得：(0.6，4.7)和(0，5.2)这两点之间的线段上的所有点均为原问题的满意解。

(2) 对于此目标规划问题用单纯形法进行计算，步骤和过程参考(1)。

可得

$x_1=70,x_2=20$ 为原问题的满意解。

(3) 对于此目标规划问题用单纯形法进行计算，见表 4－3。

表 4－3

c_j			0	0	0	P_1	0	P_1	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
0	d_1^-	1	[1]	1	1	-1	0	0	0	0	1
0	d_2^-	4	2	2	0	0	1	-1	0	0	2
P_2	d_3^-	50	6	-4	0	0	0	0	1	-1	$\frac{25}{3}$

c_j			0	0	0	P_1	0	P_1	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	P_1		0	0	0	1	0	1	0	0	
	P_2		-6	4	0	0	0	0	0	1	
0	x_1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	
0	d_2^-	2	0	0	-2	2	1	-1	0	0	
P_2	d_3^-	44	0	-10	-6	6	0	0	1	-1	
	P_1		0	0	0	1	0	1	0	0	
	P_2		0	10	6	-6	0	0	0	1	

由表 4—3 可得 $x_1=1, x_2=0$ 为原问题的满意解。

◎4.4 以下目标规划问题

$$\min z=P_1d_1^-+P_2d_4^++P_3(5d_2^-+3d_3^-)+P_3(3d_2^++5d_3^+)$$

$$x_1+x_2+d_1^--d_1^+=80$$

$$x_1+d_2^--d_2^+=70$$

$$x_2+d_3^--d_3^+=45$$

$$d_1^++d_4^--d_4^+=10$$

$$x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\geqslant 0, i=1,2,3,4$$

(1) 用单纯形法求这问题的满意解。

(2) 若目标函数变为

$$\min z=P_1d_1^-+P_2(5d_2^-+3d_3^-)+P_2(3d_2^++5d_3^+)+P_3d_4^+$$

问原满意解有什么变化?

(3) 若第一个目标约束的右端项改为 120,这时原满意解又有什么变化?

分析 本题考查了解目标规划的单纯形法。

解 (1)对于此目标规划问题,用单纯形法进行计算,见表 4—4。

表 4—4

c_j			0	0	P_1	0	$5P_3$	$3P_3$	$3P_3$	$5P_3$	0	P_2	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
P_1	d_1^-	80	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	80
$5P_3$	d_2^-	70	[1]	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	70
$3P_3$	d_3^-	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	—
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		-5	-3	0	0	0	8	0	8	0	0	
P_1	d_1^-	10	0	[1]	1	-1	-1	1	0	0	0	0	10
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	—
$3P_3$	d_3^-	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	45

c_j			0	0	P_1	0	$5P_3$	$3P_3$	$3P_3$	$5P_3$	0	P_2	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		0	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	-3	0	0	5	3	0	8	0	0	
0	x_2	10	0	1	1	-1	-1	1	0	0	0	0	—
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	—
$3P_3$	d_3^-	35	0	0	-1	[1]	1	-1	1	-1	0	0	35
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	—
	P_1		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	0	3	-3	2	6	0	8	0	0	
0	x_2	45	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	
0	x_1	70	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	
0	d_1^+	35	0	0	-1	1	1	-1	1	-1	0	0	
0	d_4^-	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	
	P_1		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	P_2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	P_3		0	0	0	0	5	3	3	5	0	0	

由表 4—4 可得 $x_1=70, x_2=45$ 为原问题的满意解。

(2)实际上是将原目标函数中的优先因子 P_2, P_3 调换了一下，这时只需将表 4—4 中的检验数 P_2 行和 P_3 行和 c_j 行的 P_2 和 P_3 对换即可。可见此时的解仍满足最优性条件故原满意解不发生变化。

(3)
$$\Delta b' = B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将此变化反映到最终表中，因 b 列出现负数。用(—1)乘以 d_1^+ 行的各系数后，重新用单纯形法进行迭代。

可得 $x_1=75, x_2=45$ 为此目标规划问题的满意解。

○4.5 某工厂生产两种产品，每件产品Ⅰ可获利 10 元，每件产品Ⅱ可获利 8 元。每生产一件产品Ⅰ，需要 3 小时；每生产一件产品Ⅱ，需要 2.5 小时，每周总的有效时间为 120 小时。若加班生产，则每件产品Ⅰ的利润降低 1.5 元；每件产品Ⅱ的利润降低 1 元。决策者希望在允许的工作及加班时间内取得最大利润，试建立该问题的目标规划模型，并求解。

解　要建立目标规划模型，题设的条件不够。

◎**4.6** 某商标的酒是三种等级的酒兑制而成。若这三种等级的酒每天供应量和单位成本为：

表 4－5

等级	日供应量(kg)	成本(元/kg)
Ⅰ	1 500	6
Ⅱ	2000	4.5
Ⅲ	1000	3

设该种牌号酒有三种商标(红、黄、蓝),各种商标的酒对原料酒的混合比及售价见表4－6。决策者规定:首先必须严格按规定比例兑制各商标的酒;其次是获利最大;再次是红商标的酒每天至少生产 2000kg,试列出数学模型。

表 4－6

商标	兑制要求	售价(元/kg)
红	Ⅲ少于 10%　Ⅰ多于 50%	5.5
黄	Ⅲ少于 70%　Ⅰ多于 20%	5.0
蓝	Ⅲ少于 50%　Ⅰ多于 10%	4.8

分析 建立目标规划的数学模型,考虑正负偏差变量。

解 用 $x_{iA},x_{iB},x_{iC}(i=1,2,3)$分别表示兑制第 i 种等级的红、黄、蓝三种商标的酒的数量。根据题意,可建立如下的数学模型:

$$\max z=P_1(d_1^-+d_2^++d_3^-+d_4^++d_5^-+d_6^+)+P_2d_8^++P_3d_7^+$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_{3A}-0.1(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+d_1^--d_1^+=0\\x_{1A}-0.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+d_2^--d_2^+=0\\x_{3B}-0.7(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+d_3^--d_3^+=0\\x_{1B}-0.2(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+d_4^--d_4^+=0\\x_{3C}-0.5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})+d_5^--d_5^+=0\\x_{1C}-0.1(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})+d_6^--d_6^+=0\\x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+d_7^--d_7^+=2000\\x_{ij},d_k^-,d_k^+\geqslant 0,i=1,2,3;j=A,B,C;k=1,2,\cdots,6\end{cases}$$

其中,$z=5.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+4.8(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})-6(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C})-4.5(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C})-3(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C})+d_8^--d_8^+$

根据下列模型求出:

$$\max z=5.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})+5(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})+4.8(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})$$
$$-6(x_{1A}+x_{1B}+x_{1C})-4.5(x_{2A}+x_{2B}+x_{2C})-3(x_{3A}+x_{3B}+x_{3C})$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_{3A}-0.1(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})<0 \\ x_{1A}-0.5(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A})>0 \\ x_{3B}-0.7(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})<0 \\ x_{1B}-0.2(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})>0 \\ x_{3C}-0.5(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})<0 \\ x_{1C}-0.1(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C})>0 \\ x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}\geqslant 2000 \\ x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,3; j=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C} \end{cases}$$

第五章

整 数 规 划

内容提要

一、整数规划问题的特点

1. 整数规划

（1）整数规划：决策变量要求取整数的线性规划。

（2）整数规划可分为纯整数规划和混合整数规划。

（3）整数规划的可行域为离散点集。

2. 建模步骤

整数规划模型的建立几乎与线性规划模型的建立完全一致，只是变量的部分或全体必须限制为整数。

二、求解整数规划的常用方法

1. 分支定界法

没有最大化的整数规划问题 A，与它相应的线性规划问题为问题 B，从解问题 B 开始，若其最优解不符合 A 的整数条件，那么 B 的最优目标函数必是 A 的最优目标函数 z^* 的上界，记作 $\bar{z}$，而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个下界 $\underline{z}$ 分支定界法就是将 B 的可行域分成子区域的方法，逐步减小 $\bar{z}$ 和增大 $\underline{z}$，最终求得 z^*。

用分支定界法求解最大化整数规划问题的步骤为：

（1）解与整数规划问题 A 相应的线性规划问题 B，可能得到以下几种情况之一：

① B 没有可行解，A 也没有可行解，停止计算。

② B 有最优解，并符合问题 A 的整数条件，则此最优解即为 A 的最优解，停止计算。

③ B 有最优解，但不符合 A 的整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$。

（2）用观察法找问题 A 的一个整数可行解，求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$，以 z^* 表示

问题 A 的最优目标数值，则$\underline{z}\leqslant z^*\leqslant\bar{z}$。

下面进行迭代。

分支，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j。

构造两个约束条件

$$x_j\leqslant[b_j] \quad ①$$

和

$$x_j\geqslant[b_j]+1 \quad ②$$

其中$[b_j]$为不超过 b_j 的最大整数。

将这两个约束条件分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数约束条件求解这两个后继问题。

定界，以每个后继问题为一分支标明求解的结果。

第一步：先不考虑整数约束，变成一般的线性规划问题，用图解法或单纯形法求其最优解，记为 $X^*_{(0)}$；

第二步：若求得的最优解 $X^*_{(0)}$，刚好就是整数解，则该整数就是原整数规划的最优解，否则转下步；

第三步：对原问题进行分支寻求整数最优解。

选取非整数解 $X^*_{(0)}$ 的一个非整数分量 $x_i^*=\bar{b}_i$，其小数部分为 d_i，以该非整数部分量的相邻整数$\bar{b}_i-d_i$ 和$\bar{b}_i-d_i+1$ 为边界将原问题分支为两个子问题，并抛弃这两个整数之间的非整数区域：

①在原线性规划模型中添加分支约束 $x_i\leqslant\bar{b}_i-d_i$，构成第一个子问题。

②在原线性规划模型中添加分支约束 $x_i\geqslant\bar{b}_i-d_i+1$，构成第二个子问题。

第四步：对上面两个子问题按照线性规划方法求最优解。若某个子问题的解是整数解，则停止该子问题的分支，并且把它的目标值与上一步求出的最优整数解相比较以决定取舍；否则，对该子问题继续进行分支。

第五步：重复第三、四步直至获得原问题最优整数解为止。

2. **割平面法**

割平面法既可以求解纯整数规划，也可以用于求解混合整数规划。其基本思路与分支定界法类似，它也是在求解整数规划(Ⅰ)的相应的线性规划(L)的基础上，不断新的约束，通过求解一系列线性规划问题，最终得到原问题(Ⅰ)的整数最优解。但在此方法中，新约束的求法与分支定界法中不同，此外新增加的约束叫做割平面或切割方程，它使得由原可行域中切割掉一部分，此部分只包含非整数解，但不切割掉任何整数可行解。

割平面法求解整数规划的求解步骤：

(1) 先不考虑整数条件，求解(Ⅰ)相对应的线性规划问题(L)，与分支定界法步骤(1)一样，同样可得到三种结果之一。

(2) 求一个切割方程：切割方程可由单纯形表的最终表中的任一个含有非整数基变量的等式约束演变而来，因此，切割方程不惟一。

1° 令 x_i 为相应的线性规划(L)的最优解中为分数值的一个基变量，由单纯形的

最终表得到：

$$x_i + \sum_k a_{ik} x_k = b_i \quad ①$$

其中 $i \in Q$（Q 表示构成基变量号码的集合），$k \in K$（K 表示构成非基变量号码的集合）。

2° 将 b_i 和 a_{ik} 都分解成整数部分 N 和非负真分数 f 之和，即

$$\begin{cases} b_i = N_i + f_i, & \text{其中 } 0 < f_i < 1 \\ a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}, & \text{其中 } 0 < f_{ik} < 1 \end{cases} \quad ②$$

而 N 为不超过 b 的最大整数，即 $N = [b]$。并将①代入②，得

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k \quad ③$$

3° 提出变量为整数的条件（当然还有非负条件），由③式左边看必须是整数，但右边因为 $0 < f_i < 1$，所以不能为正，故得切割方程

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leqslant 0, i \in Q \quad ④$$

(3) 在(L)的基础上，增加第一个切割方程，即构成线性规划问题(L_1)，用单纯形法或对偶单纯形法求最优解，若(L_1)得到的仍为非整数解，则返回步(2)，继续求第二个切割方程。

三、两类特殊的整数规划

1. 0-1 规划问题

(1) 一般形式

0-1 型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量 x_i 仅取 0 或 1，它和一般整数规划的约束条件形式是一致的。

(2) 求解方法——隐枚举法

0-1 规划常用隐枚举法和过滤法，都是利用变量只能取 0 或 1 两个值的特性。隐枚举法是一种特殊的分支定界法，它适用任何 0-1 规划问题的求解。但用隐枚举法要经过一些模型的变换。过滤法实际上就是隐枚举法的一个特殊情况，在计算的过程中确定一个过滤条件，不断地检验，由于 0-1 的特性，其工作量在维数不大的情况下也是可以很快完成的，但当维数很大时不可取。

要用隐枚举法，首先应将 0-1 规划化成以下规范形式：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{（其中所有的 } c_j \leqslant 0\text{）}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

① 如果目标函数是求最小值，则对目标函数两边乘以 -1，改求最大值。

② 如果目标函数中某变量 x_j 的系数 $c_j > 0$，则令 $x_j = 1 - y_j$ 替换 x_j，其中 y_j 为 0-1 变量，于是变量 y_j 在目标函数中的系数变成小于 0。

③ 如果约束条件是“$\geqslant$”形式，则可两边乘以 -1，改为“$\leqslant$”的形式。

④ 如果约束条件中含有等式，则可将每个等式化成两个"≤"形式的不等式，例如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{可化成} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant -b_i \end{cases}$$

0—1 规划的隐枚举法的基本思想是：首先令全部变量取 0（因为目标函数的系数全非正，此时，相应的目标函数值 $s=0$ 就是上界）。如果此解可行，则为最优解，计算终止；否则，选择某个变量为 0 或 1，将问题分析成两个子问题，继续分别对它们进行检验，即令没有被选择的变量全部为 0，检查是否可行。如此下去，或者再分支，或者使所有的子问题停止分支，并以最大下界值对应的可行解为最优解。

2. 分派问题

(1) 分派问题的特点

把 m 项工作分派给 n 个人去做，既发挥各人特长又使效率最高。这是一类特殊 0—1 规划问题。

(2) 求解方法——匈牙利法

该方法由匈牙利数学家科宁发明，也叫画圈法。

① 分派问题的标准型

目标为 min；系数矩阵为方阵（即人数与工作数相等，或者说每项工作只能由一人来做，每个人只能做一项工作）且其所有元素均为非负。满足这两个条件的分派问题叫做标准型的分派问题。

② 标准型分派问题的求解

典型例题与解题技巧

【例 1】 运筹学中著名的旅行商贩（货郎担）问题可以叙述如下：某旅行商贩从某一城市出发，到其他 n 个城市去推销商品，规定每个城市均须到达而且只到达一次，然后回到原出发城市。已知城市 i 和城市 j 之间的距离为 d_{ij}，问该商贩应选择一条什么样的路线顺序旅行，使总的旅程为最短。试对此问题建立整数规划模型。

解题分析　此题是整数规划问题中的典型问题，它与一般的线性规划建模步骤一样，只是要注意其变量的选择与约束。

解题过程　设 $x_{ij}=\begin{cases} 1, \text{旅行商贩从 } i \text{ 直接去 } j \\ 0, \text{否则} \end{cases}$

由此可写出其整数规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$
\text{st.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1(j = 1,\cdots,n)\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1(i = 1,\cdots,n)\\ u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n-1\\ u_i \text{ 为连续变量}(i=1,\cdots,n)\text{，也可取整数值}\\ i,j=1,\cdots,n,i\neq j\end{cases}
$$

【例 2】 用分支定界法解：

$$
\min z = -x_1 - x_2
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}x_1 + 9/14x_2 \leqslant 51/14\\ -2x_1 + x_2 \leqslant 1/3\\ x_1,x_2 \geqslant 0 \quad x_1,x_2 \text{ 是整数}\end{cases}
$$

解题分析 用分支定界法解题的关键在于两点：第一，正确地分支，并加上适当的约束条件；第二，正确地确定整数规划目标函数的上界与下界，以进行比较、简化计算。

解题过程 此问题不是标准形式，先将其化为标准形式，再求解。

$$
\max z = x_1 + x_2
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \leqslant \dfrac{51}{14}\\ -2x_1 + x_2 \leqslant \dfrac{1}{3}\\ x_1,x_2 \geqslant 0,x_1,x_2 \text{ 是整数}\end{cases}
$$

第一步，选不考虑 x_1、x_2 是整数，用图解法(图 5－1)可求得最优解为：

$$
x_1 = 3/2,x_2 = 10/3,\max z = 29/6
$$

图 5－1

第二步，考虑 x_1、x_2 是整数，显然，x_1、x_2 都等于零是可行解，则可将目标函数值的范围界定为：$\underline{z}=0$，$\bar{z}=29/6$

第三步，对 $x_1=3/2$，则可将之分为两个支(本题分支过程如图 5－2 所示)，即 $x_1\leqslant 1$和 $x_1\geqslant 2$，将它们作为约束条件分别代入原问题得到两个线性规划问题，分别求解。此时得到的 x_1 是整数，而 x_2 仍不是整数，对 x_2 再进行分支。

此时，目标函数值的范围为：$\underline{z}=0$，$\bar{z}=41/9$

图 5－2

第四步，继续求解和分支，直到求得的解是整数解为止。得到最优解为

$$x_1=2,x_2=2,\max z=4 \text{ 和 } x_1=3,x_2=1,\max z=4$$

【例 3】 用隐枚举法求下述 0－1 规划模型的解。

$$\max z=3x_1+2x_2-5x_3-2x_4+3x_5$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5\leqslant 4 \\ 7x_1+3x_3-4x_4+3x_5\leqslant 8 \\ 11x_1-6x_2+3x_4-3x_5\geqslant 3 \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1,\cdots,5) \end{cases}$$

解题分析 隐枚举法实际上就是特殊的分支定界法，其主要工作在于每次分支时所确定的 0 或 1 的解以及判断是否是可行解，是否与 $\underline{z}$ 相比能够满足模型要求。

解题过程 令 $x_1=1-x'_1$，$x_2=1-x'_2$，$x_5=1-x'_5$，将模型化成标准形式如下：

$$\max z'=8-3x'_1-2x'_2-5x_3-2x_4-3x'_5$$

$$\begin{cases} -x'_1-x'_2+3x+2x_4-x'_5\leqslant -1 \\ -7x'_1+3x_3-4x_4-3x'_5\leqslant -2 \\ 11x'_1-6x'_2-3x_4-3x'_5\leqslant -1 \\ x'_1,x'_2,x_3,x_4,x'_5=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

由 $x'_2=x_4=x'_1=x_3=0$，$x'_5=1$，$z_{\max}=5$ 可知最优解为

$$x_1=x_2=1,x_3=x_4=x_5=0,z_{\max}=5$$

历年考研真题评析

【题 1】 （2006 年复旦大学）采用变量代换，试把非线性 0－1 整数规划

$$\max z=x_1{}^2+x_2x_3-x_1x_2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-3x_1+4x_2+x_3\leqslant 3\\ x_1,x_2,x_3\ \text{为 0 或 1}\end{cases}$$

转换成一个 0－1 整数规划。

解题分析 0－1 规划即约束中自变量只能取值 0 或 1。

解题过程 令 $y_1=\begin{cases}0,\text{当 } x_2=x_3=1\\ 1,\text{否则}\end{cases}$，故有 $x_2x_3=y_1$

再令 $y_2=\begin{cases}1,\text{当 } x_1=x_2=x_3=1\\ 0,\text{否则}\end{cases}$，故有 $x_1x_2x_3=y_2$

而 $x_1{}^2$ 与 x_1 等价，故原问题可等价地写为

$$\max z=x_1+y_1-y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-3x_1+4x_2+x_3\leqslant 3\\ y_1\leqslant x_2\\ y_1\leqslant x_3\\ y_2\leqslant x_1\\ y_2\leqslant x_2\\ y_2\leqslant x_3\\ x_2+x_3\leqslant y_1+1\\ x_1+x_2+x_3\leqslant y_2+2\\ x_1,x_2,x_3,y_1,y_2\ \text{为 0 或 1}\end{cases}$$

【题 2】 (2005 年南京大学)现要在五个工人中确定四个人来分别完成四项工作中的一项工作。由于每个工人的技术特长不同，他们完成各项工作所需的工时也不同。每个工人完成每项工作所需工时如表 5－1 所示：

表 5－1

所需工时 工作 / 工人	A	B	C	D
Ⅰ	9	4	3	7
Ⅱ	4	6	5	6
Ⅲ	5	4	7	5
Ⅳ	7	5	2	3
Ⅴ	10	6	7	4

试找出一个工作分配方案，使总工时最小。

解题分析 本题属“不平衡”指派问题，故应先虚拟一项工作，使其平衡，再按常规求解即可。

解题过程 虚拟一项工作 E，设每人完成 E 所用时间都是“0”，从而转化为五个人完成五项工作的分配问题，再用匈牙利法求解：

最优解为：Ⅰ—C，Ⅱ—A，Ⅲ—B，Ⅳ—D，Ⅴ—E，即应安排工人Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ分别完成工作 C、A、B、D，此时用时间最少，为 $3+4+4+3=14$。

课后习题全解

◎5.1 对下列整数规划问题，问用先解相应的线性规划然后凑整的办法能否求到最优整数解？

(1) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\x_1,x_2\geqslant 0\\x,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

(2) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\2x_1+x_2\leqslant 9\\x_1,x_2\geqslant 0\\x_1,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

分析　先用单纯形法求解，然后凑整。用分支定界法求解，最后比较两次求解的结果。

解　(1)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量 x_3,x_4，化为标准型，可得

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=14.5\\4x_1+x_2+x_4=16.5\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\\x,x_2\ \text{为整数}\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5—2 所示。

表 5—2

c_j			3	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	29/2	2	3	1	0	29/4
0	x_4	33/2	[4]	1	0	1	33/8
c_j-z_j			3	2	0	0	
0	x_3	25/4	0	[5/2]	1	−1/2	5/2
3	x_1	33/8	1	1/4	0	1/4	33/2
c_j-z_j			0	5/4	0	−3/4	
2	x_2	5/2	0	1	2/5	−1/5	
3	x_1	7/2	1	0	−1/10	3/10	
c_j-z_j			0	0	−1/2	−1/2	

因而最优解为$\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，$z^*=3\times\frac{7}{2}+2\times\frac{5}{2}=\frac{31}{2}$

当凑整为 $X'=(4,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时显然为非可行解；同样，当凑整为 $X''=(4,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 或 $X'''=(3,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 也不是可行解．当凑整为 $X''''=(3,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，相应的

$z=13$。

用分支定界法求解该整数规划问题。

记 $\bar{z}=\frac{31}{2}$,因为 $x_1=0,x_2=0$ 为可行解,故有 $0\leqslant z^*\leqslant\frac{31}{5}$分解为两个子问题:

$$(B_1)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $(3,\frac{17}{6},0,\frac{5}{3},0)^{\mathrm{T}},z_1=\frac{44}{3}$

$$(B_2)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\x_1\geqslant 4\\x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $(4,\frac{1}{2},5,0,0)^{\mathrm{T}},z_2=13$

综合知 $0\leqslant z^*\leqslant\frac{44}{3}$并再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4:

$$(B_3)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\0\leqslant x_2\leqslant 2\end{cases}$$

得最优解 $(3,2,\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{4},0,0)^{\mathrm{T}},z_1=13$

$$(B_4)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解 $(\frac{11}{4},3,0\ \frac{5}{2},\frac{1}{4},0,0)^{\mathrm{T}},z_4=\frac{57}{4}$

B_3 已是整数解,可取 $\underline{z}=z_3=13$. 对 B_2 一支而言,继续分解已无意义,可舍去。

所以,$13\leqslant z^*\leqslant\frac{57}{4}$,分解 B_4 为 B_5 和 B_6:

$$(B_5)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 2\\x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解$(2,\frac{7}{2},0,5,0,\frac{1}{2},0)^T$，$z_5=13=\underline{z}$ 故舍去。

$$(B_6)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14.5\\4x_1+x_2\leqslant 16.5\\0\leqslant x_1\leqslant 3\\x_2\geqslant 3\\x_1\geqslant 3\end{cases}$$

无可行解，故舍去。

可知 $x_1^*=3$，$x_2^*=2$ 为最优整数解，$z^*=\underline{z}=13$，与舍去法得到的最优解一致。

(2)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量 x_3,x_4，化为标准型，可得

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=14\\2x_1+\ \ x_2+x_4=9\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\\x_1,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5－3 所示。

表 5－3

c_j			3	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	14	2	3	1	0	7
0	x_4	9	[2]	1	0	1	9/2
c_j-z_j			3	2	0	0	
0	x_3	5	0	[2]	1	－1	5/2
3	x_1	9/2	1	1/2	0	1/2	9
c_j-z_j			0	1/2	0	－3/2	
2	x_2	5/2	0	1	1/2	－1/2	
3	x_1	13/4	1	0	－1/4	3/4	
c_j-z_j			0	0	－1/4	－5/4	

因而最优解为$(\frac{13}{4},\frac{5}{2},0,0)^T$，$z^*=\frac{59}{4}$

当凑整为 $x_1=4$，$x_2=3$ 时，显然为非可行解。

用分支定界法。

已知 $\underline{z}=0\leqslant z^*\leqslant\frac{59}{4}=\bar{z}$，将原问题分解为两个子问题：

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$(B_1)\qquad \text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+x_2\leqslant 9\\ x_1\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $x_1=3,x_2=\frac{8}{3},z_1=\frac{43}{3}$

$$(B_2)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+x_2\leqslant 9\\ x_2\geqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

得最优解 $x_1=4,x_2=1,z_2=14$. 已为整数解，由此判定可取 $\underline{z}=14,\bar{z}=\frac{43}{3}$，故

$14\leqslant z^*\leqslant\frac{43}{3}$

再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4：

$$(B_3)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+x_2\leqslant 9\\ 0\leqslant x_1\leqslant 3\\ 0\leqslant x_2\leqslant 2\end{cases}$$

得最优解 $x_1=3,x_2=2,z_3=13<\underline{z}$

$$(B_4)\qquad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 14\\ 2x_1+x_2\leqslant 9\\ 0\leqslant x_1\leqslant 3\\ x_2\geqslant 3\end{cases}$$

得最优解 $x_1=\frac{5}{2},x_2=3,z_4=\frac{27}{2}<\underline{z}$

故剪去 B_1 分支。从而可以断定 $x_1^*=4,x_2^*=1$ 为最优整数解，$z^*=14$。

◎5.2 用分支定界法解：

$$\max z=x_1+x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14}\\ -2x_1+x_2\leqslant\frac{1}{3}\\ x_1,x_2\geqslant 0\\ x_1,x_2\ \text{整数}\end{cases}$$

分析 本题考查了分支定界法。

解　在原线性规划问题约束条件中分别添加松弛变量 x_3，x_4，化为标准型，可得

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 + x_3 = \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 + x_4 = \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形求解，计算结果如表 5－4 所示。

表 5－4

c_j			1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	51/14	[1]	9/14	1	0	51/14
0	x_4	1/3	－2	1	0	1	—
$c_j - z_j$			3	2	0	0	
1	x_1	51/14	1	9/14	1	0	51/9
0	x_4	160/21	0	[161]	2	1	160/3381
$c_j - z_j$			0	5/14	－1	0	
1	x_1	3/2	1	0	7/16	－9/32	
1	x_2	10/3	0	1	7/8	7/16	
$c_j - z_j$			0	0	－21/16	－5/32	

因而最优解为 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{10}{3}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$，$z^* = \dfrac{29}{6}$

因为 $\underline{z} = 0 \leqslant z^* \leqslant \dfrac{29}{6} = \bar{z}$，将原问题分解为两个子问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$(B_1)\qquad \text{s. t.}\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \leqslant \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 \leqslant \dfrac{1}{3} \\ \qquad\quad x_1 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

得最优解 $x_1 = 1$，$x_2 = \dfrac{7}{3}$，$z_1 = \dfrac{10}{3}$

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$(B_2)\qquad \text{s. t.}\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \leqslant \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + \quad x_2 \leqslant \dfrac{1}{3} \\ x_1 \geqslant 2 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=2, x_2=\frac{23}{9}, z_2=\frac{41}{9}$

由此判定可取 $\underline{z}=0\leqslant z^*\leqslant\frac{41}{9}=\bar{z}$

再分解 B_1 为两支 B_3 和 B_4：

$$(B_3)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ 0\leqslant x_1\leqslant 1 \\ 0\leqslant x_2\leqslant 1 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=\frac{5}{6}, x_2=2, z_3=\frac{17}{6}$

$$(B_4)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\leqslant 1 \\ x_2\geqslant 3 \end{cases}$$

无可行解，故剪去 B_4 分支。

再分解 B_2 为两支 B_5 和 B_6：

$$(B_5)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\leqslant 2 \\ 0\leqslant x_2\leqslant 2 \end{cases}$$

得最优解 $x_1=2, x_2=2, z_5=4$ 为整数解，由此判定可取 $\underline{z}=4\leqslant z^*\leqslant\frac{41}{9}=\bar{z}$

$$(B_6)\quad \max z=3x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14} \\ -2x_1+\quad x_2\leqslant\frac{1}{3} \\ x_1\geqslant 2 \\ x_2\geqslant 3 \end{cases}$$

无可行解，故剪去 B_6 分支。

因为 $z_3<\underline{z}=4$，故剪去 B_3 分支。从而可以断定 $x_1^*=2, x_2^*=2$ 为最优整数解，$z^*=4$。

5.3 用 Gomory 切割法解：

(1) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 6\\4x_1+5x_2\leqslant 20\\x_1,x_2\geqslant 0\\x_1,x_2\text{整数}\end{cases}$$

(2) $\max z=3x_1-x_2$

$$\begin{cases}3x_1-2x_2\leqslant 3\\-5x_1-4x_2\leqslant -10\\2x_1+x_2\leqslant 5\\x_1,x_2\geqslant 0\\x_1,x_2\text{ 整数}\end{cases}$$

分析　将问题化为标准型并用单纯形法求解，得到变量间的关系式。得到切割方程，引入松弛变量求解。

解　(1)在原线性规划问题约束条件中添加松弛变量 x_3,x_4，化为标准型，可得

$$\max z=x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=6 & ①\\4x_1+5x_2+x_4=20 & ②\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 & ③\\x_1,x_2,x_3,x_4\text{ 整数} & ④\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5—5 所示。

表 5—5

c_j			1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	2	1	1	0	6
0	x_4	20	4	[5]	0	1	4
c_j-z_j			1	1	0	0	
1	x_3	2	[6/5]	0	1	−1/5	5/3
1	x_2	4	4/5	1	0	1/5	5
c_j-z_j			1/5	0	0	−1/5	
1	x_1	5/3	1	0	5/6	−1/6	
1	x_2	8/3	0	1	−2/3	1/3	
c_j-z_j			0	0	−1/6	−1/30	

因而最优解为 $x_1=\frac{5}{3},x_2=\frac{8}{3},x_3=0,x_4=0;z=\frac{13}{3}$

由最终单纯形得到变量间的关系式：

$$x_1+\frac{5}{6}x_3-\frac{1}{6}x_4=\frac{5}{3}$$

$$x_2-\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=\frac{8}{3}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项，以上两式变为

$$x_1-x_4-1=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}(x_3+x_4)$$

$$x_2-2-x_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(x_3+x_4)$$

现考虑整数条件，要求 x_1,x_2 都为非负整数，于是由条件①、②可知 x_3,x_4 也都为非负数。整数条件④可由下式代替

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(x_3+x_4)\leqslant 0$$

即

$$-x_3-x_4\leqslant -2 \qquad ⑤$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量，得到等式

$$-x_3-x_4+x_5=-2$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5－6。从下表的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5－6

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	5/3	1	0	5/6	－1/6	0
1	x_2	8/3	0	1	－2/3	－1/3	0
0	x_5	－2	0	0	－1	[－1]	1
c_j-z_j			0	0	－1/6	－1/30	0
1	x_1	2	1	0	1	0	－1/6
1	x_2	2	0	1	－1	0	1/3
0	x_4	2	0	0	1	1	－1
c_j-z_j			0	0	0	0	－1/6

由于 x_1,x_2 的值为整数，所以最优解为 $x_1^*=2,x_2^*=2,x_3^*=0,x_4^*=2,x_5^*=0$，目标函数的最优值为 $z^*=4$。

(2)第一个约束条件左边添加松弛变量 x_3；第二个约束条件左右两边同时乘以－1，然后左边再减去剩余变量 x_4，加上人工变量 x_5；第三个约束条件左边添加松弛变量 x_6，即可化为标准型，可得

$$\max z=3x_1-x_2+0x_4-Mx_5+0x_6$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=3 & ①\\5x_1+4x_2-x_4+x_5=10 & ②\\2x_1+x_2+x_6=5 & ③\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0 & ④\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\text{ 为整数} & ⑤\end{cases}$$

不考虑整数条件，用单纯形法求解，计算结果如表 5－7 所示。

表 5－7

c_j			3	-1	0	0	$-M$	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	3	[3]	-2	1	0	0	0	1
$-M$	x_5	10	5	4	0	-1	1	0	2
0	x_6	5	2	1	0	0	0	1	5/2
c_j-z_j			$3+5M$	$-1+4M$	0	M	0	0	
3	x_1	1	1	$-2/3$	1/3	0	0	0	—
$-M$	x_5	5	0	[22/3]	$-5/3$	-1	1	0	15/22
0	x_6	3	0	7/3	$-2/3$	0	0	1	9/7
c_j-z_j			0	$1+\frac{22}{3}M$	$-1-\frac{5}{3}M$	M	0	0	
3	x_1	16/11	1	0	2/11	$-1/11$	1/11	0	
-1	x_2	15/22	0	1	$-5/22$	$-3/22$	3/22	0	
0	x_6	31/22	0	0	$-3/22$	[7/22]	7/22	1	
c_j-z_j			0	0	$-7/22$	3/22	$-M-\frac{3}{22}$	0	
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	0	2/7	
-1	x_2	9/7	0	1	$-2/7$	0	0	3/7	
0	x_4	31/7	0	0	$-3/7$	1	-1	22/7	
c_j-z_j			0	0	$-5/7$	0	$-M$	$-3/7$	

因而最优解为 $x_1=\frac{13}{7},x_2=\frac{9}{7},x_3=0,x_4=\frac{31}{7},x_5=0,x_6=\frac{30}{7}$

由最终单纯形表得到变量间的关系式：

$$x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6=\frac{13}{7}$$

$$x_2-\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_6=\frac{9}{7}$$

$$-\frac{3}{7}x_3+x_4-x_5+\frac{22}{7}x_6=\frac{31}{7}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，移项，以上三式变为

$$x_1-1=\frac{6}{7}-(\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6)$$

$$x_2-x_3-1=\frac{2}{7}-(\frac{5}{7}x_3+\frac{7}{3}x_6)$$

$$-x_3+x_4-x_5+3x_6-4=\frac{3}{7}-(\frac{4}{7}x_3+\frac{1}{7}x_6)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{6}{7}-(\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_6)\leqslant 0$$

即

$$-x_3-2x_6\leqslant-6$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件，引入松弛变量 x_7，得到等式

$$-x_3-2x_6+x_7=-6$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5－8。从表 5－8 的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5－8

c_j			3	-1	0	0	$-M$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	13/7	1	0	1/7	0	0	2/7	0
-1	x_2	9/7	0	1	$-2/7$	0	0	3/7	0
0	x_4	31/7	0	0	$-3/7$	1	-1	22/7	0
0	x_7	-6	0	0	-1	0	0	[-2]	1
c_j-z_j			0	0	$-5/7$	0	$-M$	$-3/7$	0
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7
-1	x_2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0	3/14
0	x_4	-5	0	0	[-2]	1	-1	0	11/7
0	x_6	3	0	0	1/2	0	0	1	$-1/2$
c_j-z_j			0	0	$-1/2$	0	$-M$	0	$-3/14$
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7
-1	x_2	5/4	0	1	0	$-1/4$	1/4	0	$-5/28$
0	x_3	5/3	0	0	1	$-1/2$	1/2	0	$-11/14$
0	x_6	7/4	0	0	0	1/4	$-1/4$	1	$-3/28$
c_j-z_j			0	0	0	$-1/4$	$\frac{1}{4}-M$	0	$-17/28$

因而最优解为 $x_1=1,x_2=\frac{5}{4},x_3=\frac{5}{2},x_4=0,x_5=0,x_6=\frac{7}{4},x_7=0;z=\frac{7}{4}$

由最终单纯形表得变量间的关系式：

$$x_2-\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5-\frac{5}{28}x_7=\frac{5}{4}$$

$$x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-\frac{11}{14}x_7=\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5+x_6-\frac{3}{28}x_7=\frac{7}{4}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，并移项，则以上三式变为

$$x_2-x_4-x_7-1=\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5+\frac{23}{28}x_7\right)$$

$$x_3-x_4-x_7-2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{3}{14}x_7\right)$$

$$-x_5+x_6-x_7-1=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{3}{4}x_5+\frac{25}{28}x_7\right)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替：

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5+\frac{3}{14}x_7\right)\leqslant 0$$

即

$$-7x_4-7x_5-3x_7\leqslant -7$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量 x_8，得到等式

$$-7x_4-7x_5-3x_7+x_8=-7$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中，得表 5－9，从表 5－9 的 b 列可以看出，这时得到的是非可行解，于是需要用对偶单纯形法继续进行计算。

表 5－9

c_j			3	-1	0	0	$-M$	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7	0
-1	x_2	5/4	0	1	0	$-1/4$	1/4	0	$-5/28$	0
0	x_3	5/2	0	0	1	$-1/2$	1/2	0	$-11/14$	0
0	x_6	7/4	0	0	0	1/4	$-1/4$	1	$-3/28$	0
0	x_8	-7	0	0	0	[-7]	-7	0	-3	1
c_j-z_j			0	0	0	$-1/4$	$\frac{1}{4}-M$	0	$-17/28$	0
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1/7	0
-1	x_2	3/2	0	1	0	0	1/2	0	$-1/14$	$-1/28$
0	x_3	3	0	0	1	0	1	0	$-4/7$	$-1/14$
0	x_6	3/2	0	0	0	0	$-1/2$	1	$-3/14$	1/28
0	x_4	1	0	0	0	1	1	0	3/7	$-1/7$
c_j-z_j			0	0	0	0	$\frac{1}{2}-M$	0	$-1/2$	$-1/28$

因而最优解为 $x_1=1, x_2=\frac{3}{2}, x_3=3, x_4=1, x_5=0, x_6=\frac{3}{2}, x_7=0, x_8=0; z=\frac{3}{2}$

由最终单纯形表得到变量间的关系式：

$$x_2+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{14}x_7-\frac{1}{28}x_8=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x_5+x_6-\frac{9}{28}x_7+\frac{1}{28}x_8=\frac{3}{2}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和，并移项，则以上二式变为

$$x_2-x_7-x_8-1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{13}{14}x_7+\frac{27}{28}x_8\right)$$

$$-x_5+x_6-x_7-1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{19}{28}x_7+\frac{1}{28}x_8\right)$$

现考虑整数条件，整数条件⑤可由下式代替。

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}x_5+\frac{13}{14}x_7+\frac{27}{28}x_8\right)\leqslant 0$$

即

$$-14x_5-26x_7-27x_8 \leqslant -14$$

这就得到一个切割方程，将它作为约束条件。引入松弛变量 x_9，得到等式

$$-14x_5-26x_7-27x_8+x_9=-14$$

将这个新的约束方程加到单纯形表中进行计算。

按照上述步骤，继续迭代计算，最终可得到最优整数解：$x_1^*=1$，$x_2^*=2$；目标函数量优值 $z^*=1$。

小结 Gomory 切割法经常遇到收敛很慢的情形，若和其他方法配合使用也是有效的。

○ **5.4** 某城市的消防总部将全市划分为 11 个防火区，设有 4 个消防(救火)站。图 5－2 表示各防火区域与消防站的位置，其中①②③④表示消防站，1、2、…、11 表示防火区域。根据历史的资料证实，各消防站可在事先规定的允许时间内对所负责的地区的火灾予以消灭。图中虚线即表示各地区由哪个消防站负责(没有虚线连系，就表示不负责)。现在总部提出：可否减少消防站的数目，仍能同样负责各地区的防火任务？如果可以，应当关闭哪个？

图 5－2

提示：对每个消防站定义一个 0—1 变量 x_j，令

$$x_j=\begin{cases}1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时}\\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时}\end{cases}$$

$$j=1,2,3,4$$

然后对每个防火区域列一个约束条件。

解 定义 $x_j=\begin{cases}1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时}\\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时}\end{cases}$

$$j=1,2,3,4$$

则可建立如下的数学模型：

$$\min z=\sum_{j=1}^{4} x_j$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 & (1)\\ x_1\geqslant 1 & (2)\\ x_1+x_3\geqslant 1 & (3)\\ x_3\geqslant 1 & (4)\\ x_1+x_3+x_4\geqslant 1 & (5)\\ x_1+x_4\geqslant 1 & (6)\\ x_1+x_2+x_4\geqslant 1 & (7)\\ x_2+x_4\geqslant 1 & (8)\\ x_4\geqslant 1 & (9)\\ x_3+x_4\geqslant 1 & (10)\end{cases}$$

由(2)(4)(9)判定 $x_1,x_3,x_4=1$，试出$(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$为可行解，此时 $z=3$。

增加约束条件 $x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 3$，列表计算知，只有$(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$为可行解，所以可关闭消防站 2。

○ **5.5** 在有互相排斥的约束条件问题中，如果约束条件是($\leqslant$)型的，我们用加以 y_iM 项(y_i 是 0—1 变量，M 是很大的常数)的方法统一在一个问题中，如果约束条件是($\geqslant$)型的，我们将怎样利用 y_i 和 M 呢？

解 在有互相排斥的约束条件的问题中，如果约束条件是($\geqslant$)型的，在 m 个约束条件右端分别减去 y_iM，$i=1,2,\cdots,m$(y_i 是 0—1 变量，M 是很大的常数)，且$\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=m-1$。

◎5.6 解 0—1 规划：

(1) $\min z=4x_1+3x_2+2x_3$

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3\leqslant 4\\ 4x_1+x_2+3x_3\geqslant 3\\ x_2+x_3\geqslant 1\\ x_1,x_1,x_2,x_3=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1+5x_2+3x_3+4x_4$

$$\begin{cases} -4x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 0\\ -2x_1+4x_2+2x_3+4x_4\geqslant 4\\ x_1+x_2-x_3+x_4\geqslant 1\\ x_1,x_2,x_3,x_4=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

分析 本题考查了 0—1 型整数规划。

解 (1)给各约束条件编号如下：

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3\leqslant 4 & (1)\\ 4x_1+x_2+3x_3\geqslant 3 & (2)\\ x_2+x_3\geqslant 1 & (3)\\ x_1,x_2,x_3=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

先找到$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$为可行解，相应的 $z=2$，故增加约束条件

$$4x_1+3x_2+2x_3\leqslant 2 \qquad (0)$$

表 5－10

(x_1,x_2x_3)	条件				是否满足条件	z
	(0)	(1)	(2)	(3)		
(0,0,0)	0	0	0		×	
(0,0,1)	2	3	3	3	√	2
(0,1,0)	3				×	
(0,1,1)	5				×	
(1,0,0)	4				×	
(1,0,1)	6				×	
(1,1,1)	7				×	
(1,1,1)	9				×	

所以，可判定最优解 $X^*=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，目标函数最优值 $z^*=2$。

(2)给各约束条件编号如下：

$$\begin{cases}-4x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 0 & (1)\\ -2x_1+4x_2+2x_3+4x_4\geqslant 4 & (2)\\ x_1+x_2-x_3+x_4\geqslant 1 & (3)\\ x_1,x_2,x_3,x_4=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

先找到$(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为可行解，相应的 $z=4$，故增加约束条件

$$2x_1+5x_2+3x_3+4x_4\leqslant 4 \quad (0)$$

表 5－11

(x_1,x_2,x_3,x_4)	条件				是否满足条件	z
	(0)	(1)	(2)	(3)		
(0,0,0,0)	0	0	0		×	
(0,0,0,1)	4	1	4	1	√	4
(0,0,1,0)	3	1	2		×	
(0,0,1,1)	7				×	
(0,1,0,0)	5				×	
(0,1,0,1)	9				×	
(0,1,1,0)	8				×	
(0,1,1,1)	12				×	
(1,0,0,0)	2	－4			×	
(1,0,0,1)	6				×	
(1,0,1,0)	5				×	
(1,0,1,1)	9				×	
(1,1,0,0)	7				×	
(1,1,0,1)	11				×	
(1,1,1,0)	10				×	
(1,1,1,1)	14				×	

所以,可判定最优解 $X^*=(0,0,0,1)^T$,目标函数最优值 $z^*=4$。

◎5.7 有 4 个工人,要指派他们分别完成 4 种工作,每人做各种工作做消耗的时间如下表所示,问指派哪个人去完成那种工作,可使总的消耗时间为最小?

表 5－12

工种 / 工人	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

分析 本题考查的是指派问题,用匈牙利法求解。

解 变换系数矩阵为

$$\min(c_{ij})=\begin{bmatrix}15 & 18 & 21 & 24\\29 & 23 & 22 & 18\\26 & 17 & 16 & 19\\19 & 21 & 23 & 17\end{bmatrix}\begin{matrix}15\\18\\16\\17\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 3 & 6 & 9\\1 & 5 & 4 & 0\\10 & 1 & 0 & 3\\2 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix}=(b_{ij})$$

再进行试分配,得

$$\begin{bmatrix}◎ & 2 & 6 & 9\\1 & 4 & 4 & ◎\\10 & ◎ & \Phi & 3\\2 & 3 & 6 & \Phi\end{bmatrix}$$

因为 $m=3<n=4$,试指派不成功转下步,所以

指派成功,故此项工作有多种指派方案,$Z=70$,指派矩阵如下:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

即最优指派方案为：

(1) 甲→A，乙→D，丙→C，丁→B；

(2) 甲→B，乙→A，丙→C，丁→D。

第六章

无约束问题

内容提要

一、非线性规划的数学模型

$$\min f(x)$$
$$\begin{cases} h_i(x)=0, i=1,2,\cdots,m \\ g_j(x)\geqslant 0, j=1,2,\cdots,l \end{cases}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 n 维欧式空间 E^n 的向量(点);$f(x)$为目标函数,$h_i(x)=0$ 和 $g_j(x)\geqslant 0$ 为约束条件。

二、求解方法

(1)一维搜索$\begin{cases}\text{斐波那契法}\\ 0.618\text{ 法}\end{cases}$,主要思想、主要步骤及适用范围。

(2)下降算法$\begin{cases}\text{最速下降法}\\ \text{共轭梯度}\\ \text{变尺度法}\end{cases}$,基本原理,各自的优缺点。

下降迭代算法的步骤可总结如下:

① 选定某一初始点 $X^{(0)}$,并令 $k:=0$;

② 确定搜索方向 $P^{(k)}$;

③ 从 $X^{(k)}$ 出发,沿方向 $P^{(k)}$ 求步长 λ_k,以产生下一个迭代点 $X^{(k+1)}$;

④ 检查得到的新点 $X^{(k+1)}$ 是否为极小点或近似极小点,若是,则停止迭代。否则,令 $k:=k+1$,转回②继续进行迭代。

常用的终止计算准则:

根据相邻两次迭代的绝对误差

$$\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\|<\varepsilon_1$$

$$|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})|<\varepsilon_2$$

典型例题与解题技巧

【例】 用斐波那契法求函数：

$$f(x)=-3x^2+21.6x+1$$

在区间[0,25]上的极大值点，要求缩短后的区间长度不小于原区间长度的8%。

解题分析 这是一道用一维搜索求解的方程，要求读者熟练掌握一维搜索的计算方法，计算认真细心，否则得不到最后结果。

解题过程 $f(x)$为严格凹函数，因 $\delta=0.08$，$F_n=\frac{1}{\delta}=12.5$，由书中查得 $n=6$，再由计算得

$$t_1=b_0+\frac{F_5}{F_6}(a_0-b_0)=25+\frac{8}{13}(0-25)=9.615\ 4$$

$$t_1'=a_0+\frac{F_5}{F_6}(b_0-a_0)=0+\frac{8}{13}(15-0)=15.384\ 6$$

$$f(t_1)=-68.6715>f(t_1')=-376.750\ 4$$

故取

$$a_1=0,\quad b_1=15.384\ 6,\quad t_2'=9.615\ 4$$

$$t_2=b_1+\frac{F_4}{F_5}(a_1-b_1)=5.769\ 2$$

因

$$f(t_2)=25.762\ 4>f(t_2')$$

故取

$$a_2=0,\quad b_2=9.615\ 4,\quad t_3'=5.769\ 2$$

$$t_3=b_2+\frac{F_3}{F_4}(a_2-b_2)=3.846\ 2$$

因

$$f(t_3)=39.698>f(t_3')$$

故取

$$a_3=0,\quad b_3=5.769\ 2,\quad t_4'=3.846\ 2$$

$$t_4=b_3+\frac{F_2}{F_3}(a_3-b_3)=1.923\ 1$$

因

$$f(t_4)=31.444<f(t_4')$$

故取

$$a_4=1.923\ 1,\quad b_4=5.769\ 2,\quad t_5=1.923\ 1$$

并令

$$\varepsilon=0.01$$

$$t'_5=a_4+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(b_4-a_4)=3.850$$

因

$$f(t'_5)=39.6924>f(t_5)$$

故取

$$a_5=3.85,\quad b_5=5.7692$$

因

$$f(t'_5)<f(t_3)$$

故 $t_3=3.8642$ 为近似最优点。

第七章

约束极值问题

内容提要

一、二次规划

1. 定义

若非线性规划的目标函数为自变量 x 的二次函数，约束条件又全是线性的，就称这种规划为二次规划。

二次规划的数学模型可表示如下：

$$\min f(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_jkx_jx_k$$

$$\begin{cases} c_{jk}=c_{kj} & (k=1,2,\cdots,n) \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

2. 求解方法——可行方向法

可行方向法的迭代步骤如下：

(1)确定允许误差 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$，选初始近似点 $X^{(0)}\in\mathbf{R}$，并令 $k:=0$

(2)确定起作用约束指标集

$$J(X^{(k)})=\{j\,|\,g_j(X^{(k)})=0,1\leqslant j\leqslant l\}$$

① 若 $J(X^{(k)})=\varnothing$（$\varnothing$为空集），而且 $\|\nabla f(x^{(k)})\|^2>\varepsilon_1$，停止迭代，得点 $X^{(k)}$；

② 若 $J(X^{(k)})=\varnothing$，但

$$\|\nabla f(x^{(k)})\|^2>\varepsilon_1$$

则取搜索方向 $D^{(k)}=-\nabla f(X^{(k)})$，然后转向第(5)步；

③ 若 $J(X^{(k)})\neq\varnothing$，转下一步。

(3)求解线性规划

$$\min \eta$$
$$\begin{cases} \nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}} D \leqslant \eta \\ -\nabla g_i(X^{(k)})^{\mathrm{T}} D \leqslant \eta & (j \in J(X^{(k)})) \\ -1 \leqslant d_i \leqslant 1 & (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

设它的最优解是$(D^{(k)},\eta_k)$

(4)检验是否满足$|\eta_k| \leqslant \varepsilon_2$

(5)解下述一维极值问题

$$\lambda_k: \min_{0 \leqslant \lambda \leqslant \bar{\lambda}} f(X^{(k)}+\lambda D^{(k)})$$

此处

$$\lambda = \max\{\lambda \mid g_j(X^{(k)}+\lambda D^{(k)}) \geqslant 0, j=1,2,\cdots,l\}$$

(6)令

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}+\lambda_k D^{(k)}, k:=k+1$$

转回第(2)步。

二、库恩—塔克条件

1. **定义**

设x^*是非线性规划的极小点，而且与X^*点的各起约束作用的梯度线性无关，则存在向量$\Gamma^*=(r_1^*,r_2^*,\cdots,r_l^*)^{\mathrm{T}}$，使下述条件成立

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{l} r_j^* \nabla g_j(X^*) = 0 \\ r_j^* g_j(x^*)=0 & (j=1,2,\cdots,l) \\ r_j^* \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,l) \end{cases}$$

上述条件常称为K－T条件，满足这个条件的点(它当然也满足非线性规划的所有约束条件)称为库恩—塔克点(K－T点)。

三、制约函数

1. 常用的制约函数基本上有两类：一为惩罚函数(或称罚函数)，一为障碍函数，对于这两种函数，SUMT有外点法和内点法。
2. 外点法的迭代步骤如下：

(1)取$M_1>0$(例如说取$M_1=1$)，允许误差$\varepsilon>0$，并令$k:=1$

(2)求无约束问题的最优解：

$$\min_{x \in E^n} P(X,M_k) = P(X^{(k)},M_k)$$

其中

$$P(X,M_k) = f(X)+M_k \sum_{j=1}^{l} [\min(0,g_j(X))]^2$$

(3)若对某一个$j(1 \leqslant j \leqslant l)$有

$$-g_j(X^{(k)}) \geqslant \varepsilon$$

则取 $M_{k+1}>M_k$(例如,$M_{k+1}=CM_k$,$C=5$ 或 10)
令

$$k:=k+1$$

并转向第二步;
否则,停止迭代,得

$$X_{\min}\approx X^{(k)}$$

典型例题与解题技巧

【例 1】 有一线性方程组如下

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=4\\x_1-2x_2+x_3=2\\x_1+x_2-x_3=7\end{cases}$$

现欲用无约束极小化方法求解,试建立数学模型并说明计算原理。

解题分析 首先要求读者熟练掌握数学建模的步骤,建立出正确的数学模型,这是下一步求解的基础。建出模型后,要求读者熟练掌握无约束极小化的求解方法。

解题过程 (1)建立数学模型

$$\min f(X)=(x_1-x_2+3x_3-4)^2+(x_1-2x_2+x_3-2)^2+(x_1+x_2-x_3-7)^2$$

(2)计算原理

梯度法(最速下降法)

① 给定初始近似点 $X^{(0)}$ 不妨为(0,0,0),精度 $\varepsilon>0$,不妨令 $\varepsilon=0.01$,若

$$\|\nabla f(X^{(0)})\|^2\leqslant\varepsilon$$

则 $X^{(0)}$ 即为近似极小点。

② 若 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2>\varepsilon$,求进步 λ_0 并计算

$$X^{(1)}=X^{(0)}-\lambda\nabla f(X^{(0)})$$

步长求法用近似最佳步长。

③ 一般地,若 $\|\nabla f(x^{(k)})\|^2\leqslant\varepsilon$,则 $X^{(k)}$ 即为所求的近似解;若 $\|\nabla X^{(k)}\|^2>\varepsilon$ 则求步长 λ_k 并确定下一个近似点

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\lambda_k\nabla f(X^{(k)})$$

如此继续,直至达到要求的精度为止。

近似最佳步长求法

$$f(\lambda)=f(X^{(k)}-\lambda\nabla f(X^{(k)}))$$

$$=f(X^{(k)})-\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}\lambda\nabla f(X^{(k)})+\frac{1}{2}\lambda\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}H(X^{(k)})\lambda\nabla f(X^{(k)})$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}=0$,求出步长 λ。

【例 2】 给出二次规划:

$$\begin{cases}\max\ f(X)=10x_1+4x_2-x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2\\x_1+x_2\leqslant6\\4x_1+x_2\leqslant18\\x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\end{cases}$$

(a)写出 K-T 条件并求最优解；

(b)写出等价的线性规划问题并求解。

解析分析　这又是一道综合性的题目，要求读者对前后所学知识融汇贯通，尤其对线性规划一部分内容要掌握好，这是以后所有内容的基础。题目中所要用的 $K-T$ 条件，也是本章的重点内容，读者应该熟练掌握。

解题过程　(a)K－T 条件可写为

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2-10+\gamma_1+4\gamma_2-\gamma_3=0 \\ -4x_1+8x_2-4+\gamma_1+\gamma_2-\gamma_4=0 \\ \gamma_1(6-x_1-x_2)=0 \\ \gamma_2(18-4x_1-x_2)=0 \\ \gamma_3x_1=0 \\ \gamma_4x_2=0 \\ \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\geqslant 0 \end{cases}$$

解得 $x_1=4,x_2=2,\gamma_1=2,\gamma_2=2,\gamma_3=0,\gamma_4=0$

(b)其等价的线性规划问题为

$$\begin{cases} \min\ \varphi(z)=z_1+z_2 \\ 2x_1-4x_2-y_1+y_3+4y_4+z_1=10 \\ 4x_1-8x_2-y_2+y_3+y_4+z_2=4 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 4x_1+x_2+x_4=18 \\ x_{1-4}\geqslant 0,y_{1-4}\geqslant 0,z_{1-2}\geqslant 0 \end{cases}$$

解得$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(4,2,0,0)$；$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(0,0,2,2)$；$(z_1,z_2)=(0,0)$

课后习题全解

○**7.1**　在某一试验中变更条件 x_i 四次，测得相应的结果 y_i 示于下表，试为这一试验拟合一条直线，使其在最小二乘意义上最好地反映这项试验的结果(仅要求写出数学模型)。

表 7－1

x_i	2	4	6	8
y_i	1	3	5	6

解　设直线为 $y=ax+b$，则有

$$\begin{cases} \min\ z=(2a+b-1)^2+(4a+b-3)^2+(6a+b-5)^2+(8a+b-6)^2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial b}=0 \end{cases}$$

◎7.2 有一线性方程组如下

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x^3=2 \\ 3x_1-2x_2+x_3=7 \\ x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$$

现欲用无约束极小化方法求解，试建立数学模型并说明计算原理。

分析 本题考查了无约束极值问题的解法—梯变法。

解 (1)建立数学模型

$$\min f(X)=(x_1-2x_2+3x_3-2)^2+(3x_1-2x_2+x_3-7)^2+(x_1+x_2-x_3-1)^2$$

(2)计算原理

梯度法(最速下降法)：

①不妨以 $X^{(0)}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为初始近似点，取精度 $\varepsilon=0.01$，若 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2\leqslant\varepsilon$，则 $X^{(0)}$ 即为近似极小点。

②若 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2>\varepsilon$，求步长 λ_0 并计算 $X^{(1)}=X^{(0)}-\lambda_0\nabla f(X^{(0)})$，步长求法用近似最佳步长。

③如果 $\|\nabla f(X^{(k)})\|^2\leqslant\varepsilon$，则 $X^{(k)}$ 即为近似极小点；如果 $\|\nabla f(X^{(k)})\|^2>\varepsilon$，则求步长 λ_k 并计算下一个近似点：$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\lambda_k\nabla f(X^{(k)})$. 如此反复进行，直到达到要求的精度为止。

近似最佳步长求法：

$$f(\lambda)=f(X^{(k)}-\lambda\nabla f(X^{(k)}))=f(X^{(k)})-\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}\lambda\nabla f(X^{(k)})+$$
$$\frac{1}{2}\lambda\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}}H(X^{(k)})\lambda\nabla f(X^{(k)})$$

令 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}=0$，求出步长 λ。

◎7.3 试判定下述非线性规划是否为凸规划：

$$(1)\begin{cases} \min\ f(X)=x_1^2+x_2^2+8 \\ x_1-x_2\geqslant0 \\ -x_1-x_2^2+2=0 \\ x_1,x_2\geqslant0 \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} \min\ f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2 \\ x_1^2+x_2^2\leqslant4 \\ 5x_1^2+x_3=10 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant0 \end{cases}$$

分析 本题考查了凸规划的定义。

解
$$(1)\begin{cases} \min\ f(X)=x_1^2+x_2^2+8 \\ g_1(X)=x_1^2-x_2\geqslant0 \\ g_2(X)=-x_1-x_2^2+2=0 \\ x_1,x_2\geqslant0 \end{cases}$$

$f(X)$，$g_1(X)$，$g_2(X)$的海赛(Hesse)矩阵的行列式分别为

$$|H|=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0,$$

$$|g_1|=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_1(X)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$|g_2|=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_2(X)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=0$$

从而可知 $f(X)$为严格凸函数，$g_1(X)$为凸函数，所以这不是一个凸规划问题。

$$(2)\begin{cases}\min\ f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2\\ g_1(X)=-x_1^2-x_2^2+4\geqslant 0\\ g_2(X)=5x_1^2+x_3-10=0\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

$f(X),g_1(X),g_2(X)$的海赛矩阵的行列式分别为

$$|H|=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=14>0,$$

$$|g_1|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,|g_2|=\begin{vmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=14>0$$

从而可知 $f(X)$为严格凸函数，$g_1(X)$为凹函数，$g_2(X)$为凸函数，所以这不是一个凸规划问题。

○7.4　试用斐波那契法求函数

$$f(x)=x^2-6x+2$$

在区间[0,10]上的极小点，要求缩短后的区间长度不大于原区间长度的8%。

解　由$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=2x-6=0$ 可得 $x=3$，故精确解为 $t^*=3$，$f(t^*)=3^2-6\times 3+2=-7$

函数求值次数 $n=8$，最终区间为$[a_7,b_7]=[2.942,3.236]$，近似极小点为 $t=2.947$，近似极小值为 $f(2.947)=2.947^2-6\times 2.947+2=-6.997$。

○7.5　试用0.618法重做习题7.4，并将计算结果与用斐波那契法所得计算结果进行比较。

解　函数求值次数 $n=9$，最终区间为$[a_8,b_8]=[2.918,3.131]$，近似极小点为 $t=3.05$，近似极小值为 $f(3.05)=3.05^2-6\times 3.05+2=-6.998$。

○7.6　试用最速下降法求解

$$\min\ f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

选初始点 $X^{(0)}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，要求做三次迭代，并验证相邻两步的搜索方向正交。

解　$\nabla f(X)=(2x_1,2x_2,2x_3)^{\mathrm{T}}$，计算结果见表7-2。

表 7—2

迭代次数 k	λ_k	$X^{(k)}$	$\nabla f(X^{(k)})$
0	$\frac{3}{8}$	$(2,-2,1)$	$(4,-4,4)$
1	$\frac{3}{10}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(1,-1,-2)$
2	$\frac{3}{8}$	$(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{10})$	$(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5})$
3		$(\frac{1}{20},-\frac{1}{20},-\frac{1}{20})$	$(\frac{1}{10},-\frac{1}{10},-\frac{1}{5})$

由$(4,-4,4)$，$(1,-1,-2)$，$(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5})$，$(\frac{1}{10},-\frac{1}{10},-\frac{1}{5})$可知相邻两步的搜索方向正交。

◎**7.7** 试用最速下降法求函数

$$f(X)=-(x_1-2)^2-2x_2^2$$

的极大点.先以 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 为初始点进行计算，求出极大点；再以 $X^{(0)}=(0,1)^T$ 为初始点进行两次迭代.最后比较从上述两个不同初始点出发的寻优过程。

分析 本题考查了最速下降法。

解 求 $f(X)=-(x_1-2)^2-2x_2^2$ 的极大点，即求 $g(X)=(x_1-2)^2+2x_2^2$ 的极小点。

(1)以 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 为初始点，取精度 $\varepsilon=0.1$，

因为$\nabla g(X)=[2(x_1-2),4x_2]^T$，所以$\nabla g(X^{(0)})=(-4,0)^T$，$\|\nabla g(X^{(0)})\|^2=(\sqrt{(-4)^2+0^2})^2=16>\varepsilon$

$$H(X)=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix},$$

$$\lambda_0=\frac{\nabla g(X^{(0)})^T\nabla g(X^{(0)})}{\nabla g(X^{(0)})^T H(X^{(0)})\nabla g(X^{(0)})}=\frac{(-4,0)\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}}{(-4,0)\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}}=\frac{1}{2},$$

$X^{(1)}=X^{(0)}-\lambda\nabla g(X^{(0)})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$，于是

$\nabla g(X^{(1)})=[2(2-2),4\times0]^T=(0,0)^T$，即 $X^{(1)}$ 为极小点，从而$(2,0)^T$ 为 $f(X)$ 的极大点.

(2)以 $X^{(0)}=(0,1)^T$ 为初始点，取精度 $\varepsilon=0.1$，方法同上进行两次迭代，有：

两次步长：$\lambda_0=\frac{1}{3}$，$\lambda_1=\frac{1}{3}$

两次迭代结果：$X^{(1)}=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})^T$，$X^{(2)}=(\frac{16}{9},-\frac{1}{9})^T$

比较：对于目标函数的等值线为椭圆的问题来说，椭圆的圆心即为最小值，负梯度方向指向圆心，但初值点与圆心在同一水平直线上时，收敛很快，即尽量使搜索路径呈现较少的直角锯齿状。

○**7.8** 试用牛顿法重解习题 7.6。

解 $\min f(X)=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\nabla f(X)=(2x_1,2x_2,2x_3)^{\mathrm{T}}$

因为 $X^{(0)}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，所以 $\nabla f(X^{(0)})=(4,-4,2)^{\mathrm{T}}$

因为 $H(X^{(0)})=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，所以 $H(X^{(0)})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，从而

$$X=X^{(0)}-H(X^{(0)})^{-1}\nabla f(X^{(0)})=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

○**7.9** 试用牛顿法求解

$$\max f(X)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2+2}$$

取初始点 $X^{(0)}=(4,0)^{\mathrm{T}}$，用最佳步长进行。然后采用固定步长 $\lambda=1$，观察迭代情况，并加以分析说明。

解 取固定步长 $\lambda=1$ 时不收敛，取最佳步长时收敛，极大点为 $X^*=(0,0)^{\mathrm{T}},f(X^*)=\frac{1}{2}$。

◎**7.10** 试用共轭梯度法求二次函数

$$f(X)=\frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}AX$$

的极小点，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

分析 A 为对称正定阵，运用正定二次函数的共轭梯度法求解。

解 $f(X)=\frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}AX=\frac{1}{2}(x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2)$，

$$\nabla f(X)=\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X)}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2,x_1+2x_2)^{\mathrm{T}}$$

从 $X^{(0)}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 开始，

$\nabla F(X^{(0)})=(2,3)^{\mathrm{T}},P^{(0)}=-\nabla f(X^{(0)})=(-2,-3)^{\mathrm{T}}$，

$$\lambda_0=-\frac{\nabla f(X^{(0)})^{\mathrm{T}}P^{(0)}}{(P^{(0)})^{\mathrm{T}}AP^{(0)}}=\frac{(2,3)\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}}{(-2,-3)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}}=\frac{13}{34}$$

于是

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_0 P^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{13}{34}\times\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=\left(\frac{8}{34},-\frac{15}{34}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\nabla f(X^{(1)})=\left(\frac{3}{34},-\frac{2}{34}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_0=\frac{\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}\nabla f(X^{(1)})}{\nabla f(X^{(0)})^{\mathrm{T}}\nabla f(X^{(0)})}=\frac{1}{1156},$$

$$P^{(1)}=-\nabla f(X^{(1)})+\beta_0 P^{(0)}=\left(\frac{-104}{1156},\frac{65}{1156}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_1=-\frac{\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}P^{(1)}}{(P^{(1)})^{\mathrm{T}}AP^{(1)}}=\frac{34}{13}$$

故 $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_1 P^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

$X^{(2)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 即极小值点。

◎**7.11** 令 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为一组 A 共轭向量(假定为列向量),A 为 $n\times n$ 对称正定阵,试证

$$A^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

分析 共轭即正交,$X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为 E^n 中的一组基。

证明 由于 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$为 A 共轭,故它们线性独立。设 Y 为 E^n 中的任一向量,则存在 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,使

$$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX^{(i)}$$

用 A 左乘上式,得

$$AY=\sum_{i=1}^{n}a_iAX^{(i)}=a_1AX^{(1)}+a_2AX^{(2)}+\cdots+a_nAX^{(n)}$$

分别用 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$乘上式左端,并考虑到共轭关系,则有

$$(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY=a_i(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$a_i=\frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}\quad(i=1,2,\cdots,n)\cdots\cdots$$

令

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

用 AY 右乘上式,得

$$\begin{aligned}BAY&=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}\right]AY\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}X^{(i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_iX^{(i)}=Y\end{aligned}$$

故

$$BA=E \quad (\text{单位矩阵})$$

即

$$A^{-1}=B=\sum_{i=1}^{n}\frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}}AX^{(i)}}$$

●7.12　试用变尺度法求解

$$\min f(X)=(x_1-2)^3+(x_1-2x_2)^2$$

取初始点 $X^{(0)}=(0.00,3.00)^{\mathrm{T}}$,要求近似极小点处梯度的模不大于 0.5。

分析　本题考查了变尺度法。

解

$$\min f(X)=(x_1-2)^3+(x_1-2x_2)^2$$

取 $\overline{H}^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $X^{(0)}=\begin{pmatrix}0.00\\ 3.00\end{pmatrix}$

$$\nabla f(X)=[3(x_1-2),-4(x_1-2x_2)]^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla f(X^{(0)})=(-6,24)^{\mathrm{T}}$$

显然

$$\|\nabla f(Z^{(0)})\|^2>\varepsilon$$

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_0P^{(0)}=X^{(0)}+\lambda_0[-\overline{H}^{(0)}\nabla f(X^{(0)})]=\begin{pmatrix}0.00+6\lambda_0\\ 3.00-24\lambda_0\end{pmatrix}$$

$$f(X^{(1)})=(6\lambda_0-2)^3+[6\lambda_0-2(3.00-24\lambda_0)]^2$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}f(X^{(1)})}{\mathrm{d}\lambda_0}=0$

得

$$\lambda_0=\frac{19}{165}$$

故

$$X^{(1)}=[0.00+6\lambda_0,3.00-24\lambda_0]^{\mathrm{T}}=(0.69,0.24)^{\mathrm{T}}$$

$$\|\nabla f(X)^{(1)}\|^2=16.1505>0.5$$

继续迭代

$\triangle X^{(0)}=X^{(1)}-X^{(0)}=(0.69,0.24)^{\mathrm{T}}-(0.00,3.00)^{\mathrm{T}}=(0.69,-2.76)^{\mathrm{T}}$

$f(X^{(1)})=-2.20$,　$\nabla f(X^{(1)})=(-3.93,-0.84)^{\mathrm{T}}$

$\triangle G^{(0)}=\nabla f(X^{(1)})-\nabla f(X^{(0)})=(2.07,-24.84)^{\mathrm{T}}$

可得

$$\overline{H}^{(1)}=\overline{H}^{(0)}+\frac{\triangle X^{(0)}(\triangle X^{(0)})^{\mathrm{T}}}{(\triangle G^{(0)})^{\mathrm{T}}\triangle X^{(0)}}-\frac{\overline{H}^{(0)}\triangle G^{(0)\mathrm{T}}\overline{H}^{(0)}}{(\triangle G^{(0)})^{\mathrm{T}}\overline{H}^{(0)}\triangle G^{(0)}}=\begin{pmatrix}1.00 & -0.06\\ -0.06 & 0.12\end{pmatrix}$$

故

$$X^{(2)}=X^{(1)}-\lambda_1\overline{H}^{(1)}\nabla f(X^{(1)})$$

$$=\begin{pmatrix}0.69\\ 0.24\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}1.00 & -0.06\\ -0.06 & 0.12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3.93\\ -0.84\end{pmatrix}$$

如上求最优步长,可得

$$X^{(2)}=\begin{pmatrix}0.69\\0.24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3.8796\\0.135\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.69+3.8796\lambda\\0.24-0.135\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\min f(X^{(2)})&=(0.69+3.8796\lambda-2)^3+(0.69+3.8796\lambda-2\times0.24+0.27\lambda)^2\\&=(3.8796\lambda-1.31)^3+(4.1496\lambda+0.21)^2\end{aligned}$$

得 $\lambda_1=-\dfrac{5}{96}$,循环以上步骤。

小结 变尺度法避免了计算二阶系数矩阵及其求逆过程,比梯度法的收敛速度快。

◎7.13 试以 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 为初始点,使用

(1)最速下降法(迭代4次);

(2)牛顿法;

(3)变尺度法。

求解无约束极植问题

$$\min f(X)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1-x_2$$

并绘图表示使用上述各方法的寻优过程。

解 (1)用最速下降法:

$X^{(0)}=(0,0)^T,\quad \lambda_0=1$

$X^{(1)}=(-1,1)^T,\quad \lambda_1=\dfrac{1}{5}$

$X^{(2)}=(-0.8,1.2)^T,\quad \lambda_2=1$

$X^{(3)}=(-1,1.4)^T,\quad \lambda_3=\dfrac{1}{5}$

$X^{(4)}=(-0.96,1.44)^T$

(2)牛顿法:

$$X^{(0)}=(0,0)^T,H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

得极小点 $X^{(1)}=\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)^T$

(3)变尺度法:

$X^{(0)}=(0,0)^T,\quad P^{(0)}=(-1,1)^T,\quad \lambda_0=1$

$X^{(1)}=(-1,1)^T,\beta_0=1,P^{(1)}=(0,2)^T,\lambda_1=\dfrac{1}{4}$

得极小点 $X^{(2)}=\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)^T$

作图过程省略。

◎7.14 试用步长加速法(模矢法)求下述函数

$$f(X)=x_1^2+2x_2^2-4x_1-2x_1x_2$$

的极小点,初始点 $X^{(0)}=(3,1)^T$,步长

$$\triangle_1=\begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix},\triangle_2=\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}$$

并绘图表示整个迭代过程。

分析　本题考查了步长加速法，它是一种直接法。

解　第一步：

$f(X^{(0)})=-7, f(X^{(0)}+\triangle_1)=f[(3.5,1)^T]=-6.75>f(X^{(0)})$，

$f(X^{(0)}-\triangle_1)=f[(2.5,1)^T]=-6.75>f(X^{(0)})$

$\therefore T_{11}=X^{(0)}=(3,1)^T$

$f(T_{11}+\triangle_2)=f[(3,1.5)^T]=-7.5<f(X^{(0)})$

$\therefore T_{12}=(3,1.5)^T=X^{(1)}$ 且 $f(X^{(1)})=-7.5$

第二步：

$T_{20}=X^{(0)}+2(X^{(1)}-X^{(0)})=(3,2)^T$

且 $f(T_{20})=-7$，　$f(T_{20}+\triangle_1)=f[(3.5,2)^T]=-7.75<f(T_{20})$

$\therefore T_{21}=(3.5,2)^T$

$f(T_{21}+\triangle_2)=f[(3.5,2.5)^T]=-6.75>f(T_{20})$，

$f(T_{21}-\triangle_2)=f[(3.5,1.5)^T]=-7.75<f(T_{20})$

$\therefore T_{22}=(3.5,1.5)^T=X^{(2)}$ 且 $f(X^{(2)})=-7.75$

第三步：

$T_{30}=X^{(1)}+2(X^{(2)}-X^{(1)})=(4,1.5)^T$

且 $f(T_{30})=-7.5, f(T_{30}+\triangle_1)=f[(4.5,1.5)^T]=-6.75>f(T_{30})$，

$f(T_{30}-\triangle_1)=f[(3.5,1.5)^T]=-7.75<f(T_{30})$

$\therefore T_{31}=(3.5,1.5)^T$

$f(T_{31}+\triangle_2)=f[(3.5,2)^T]=-7.75<f(T_{30})$

$\therefore T_{32}=(3.5,2)^T=X^{(3)}$ 且 $f(X^{(3)})=-7.75$

第四步：

$T_{40}=X^{(2)}+2(X^{(3)}-X^{(2)})=(3.5,2.5)^T$

且 $f(T_{40})=-7$，　$f(T_{40}+\triangle_1)=f[(4,2.5)^T]=-7.5<f(T_{40})$

$\therefore T_{41}=(4,2.5)^T$

$f(T_{41}+\triangle_2)=f[(4,3)^T]=-6>f(T_{40})$，

$f(T_{41}-\triangle_2)=f[(4,2)^T]=-8<f(T_{40})$

$\therefore T_{42}=(4,2)^T=X^{(4)}$ 且 $f(X^{(4)})=-8$

第五步：

$T_{50}=(4.5,2)^T$

且 $f(T_{50})=-7.75, f(T_{50}+\triangle_1)=f[(5,2)^T]=-7>f(T_{50})$，

$f(T_{50}-\triangle_1)=f[(4,2)^T]=-8<f(T_{50})$

$\therefore T_{51}=(4,2)^T$

$f(T_{51}+\triangle_2)=f[(4,2.5)^T]=-7.75=f(T_{50})$，

$f(T_{51}-\triangle_2)=f[(4,1.5)^T]=-7.5>f(T_{50})$

$\therefore T_{52}=(4,2)^{\mathrm{T}}=X^{(5)}$

此时应在(4,2)附近探索，缩小步长以求得符合精度要求的结果。

但由题意知，此时最优解为 $X^{*}=(4,2)^{\mathrm{T}}$，如图 7－1 所示。

图 7－1

◎**7.15** 分析非线性规划

$$\begin{cases}\min\ f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\\ x_1^2+(x_2-2)^2\geqslant 4\\ \qquad x_2\qquad\leqslant 2\end{cases}$$

在以下各点的可行下降方向(使用式(7.6)和式(7.7))：

(1) $X^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$；　(2) $X^{(2)}=(2,2)^{\mathrm{T}}$；　(3) $X^{(3)}=(3,2)^{\mathrm{T}}$。

并绘图表示各点可行下降方向的范围

分析 使用课本中的式(7.6)判断方向 D 是否是 $X^{(1)}$ 的可行方向，使用式(7.7)判断方向 D 是否是 $X^{(1)}$ 的下降方向($i=1,2,3$)。

解 原非线性规划等同于

$$\begin{cases}\min\ f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\\ g_1(X)=x_1^2+(x_2-2)^2-4\geqslant 0\\ g_2(X)=\qquad -x_2\qquad +2\geqslant 0\end{cases}$$

$\nabla g_1(X)^{\mathrm{T}}=(2x_1,2(x_2-2))^{\mathrm{T}}$

$\nabla g_2(X)^{\mathrm{T}}=(0,-1)^{\mathrm{T}}$

$\nabla f(X)^{\mathrm{T}}=(2(x_1-2),2(x_2-3))^{\mathrm{T}}$

(1) $X^{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$

起作用约束的是 $g_1(X)$

$\therefore \nabla g_1(X^{(1)})^{\mathrm{T}}D=(0,-4)D>0$

$\nabla f(X^{(1)})^{\mathrm{T}}D=(-4,-6)D<0$

得 $D=(a,b)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{cases}-4b>0\\ -4a-6b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0\\ a>-\dfrac{3}{2}b\end{cases}$$

存在可行下降方向。

(2) $X^{(2)}=(2,2)^{\mathrm{T}}$

起作用约束的是 $g_1(X)$，$g_2(X)$

$\therefore \nabla g_1(X^{(2)})^{\mathrm{T}}D=(4,0)D>0$

$\nabla g_2(X^{(2)})^{\mathrm{T}}D=(0,-1)D>0$

$\nabla f(X^{(2)})^{\mathrm{T}}D=(0,-2)D<0$

即

$$\begin{cases}4a>0\\-b>0\\-2b<0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a>0\\b<0\\b>0\end{cases}\qquad\text{（无可行解）}$$

不存在可行下降方向。

(3) $X^{(3)}=(3,2)^{\mathrm{T}}$

起作用约束的为 $g_2(X)$

$\therefore \nabla g_2(X^{(3)})^{\mathrm{T}}D=(0,-1)D>0$

$\nabla f(X^{(3)})^{\mathrm{T}}D=(2,-2)D<0$

$\therefore \begin{cases}-b>0\\2a-2b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0\\a<b\end{cases}$

存在可行下降方向。

○7.16 试写出下述二次规划的 Kuhn－Tucker 条件：

$$\begin{cases}\text{Max } f(X)=C^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}HX\\AX\leqslant b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

其中：A 为 $m\times n$ 矩阵，H 为 $n\times n$ 矩阵，C 为 n 维列向量，b 为 m 维列向量，变量 X 为 n 维列向量。

解　二次规划等同于

$$\begin{cases}\min\ f(X)=-C^{\mathrm{T}}X-X^{\mathrm{T}}HX\\g_1(X)=-AX+b\geqslant 0\\g_2(X)=X\geqslant 0\end{cases}$$

设 X^* 为极小点，且与 X^* 点起作用约束的各梯度线性无关，这里假设 $g_1(X)$、$g_2(X)$ 都为起作用约束，则存在向量 $\Gamma^*=(\gamma_1^*,\cdots,\gamma_e^*)^{\mathrm{T}}$，有

$$\begin{cases}\nabla f(X^*)-\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_j^*\nabla g_j(X^*)=0\\\gamma_j^*g_j(X^*)=0\qquad(j=1,2,\cdots,l)\\\gamma_j^*\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-C^{\mathrm{T}}\nabla X\big|_{X=X^*}-\nabla(X^{\mathrm{T}}HX)\big|_{X=X^*}-\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_j^*\nabla g_j(X^*)=0\\\gamma_j^*g_j(X^*)=0\qquad(j=1,2,\cdots,l)\\\gamma_j^*\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-C^{\mathrm{T}}\nabla X|_{X=X^*}-\nabla(X^{\mathrm{T}}HX)|_{X=X^*}+\gamma_j^*A\nabla X|_{X=X^*}-\gamma_2^*\nabla X|_{X=X^*}=0\\ \gamma_1^*(-AX^*+b)=0\\ \gamma_2^*X^*=0\\ \gamma_1^*,\gamma_2^*,\cdots,\gamma_l^*\geqslant 0\end{cases}$$

◎**7.17** 试写出下述非线性规划的 Kuhn－Tucker 条件并进行求解：

(1) $\begin{cases}\max\ f(x)=(x-3)^2\\ 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\min\ f(x)=(x-3)^2\\ 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

分析 本题考查了 $K-T$ 条件及其解法。

解 (1)等同于

$$\begin{cases}\min\ f(x)=-(x-3)^2\\ g_1(X)=\quad X-1\geqslant 0\\ g_2(X)=-X+5\geqslant 0\end{cases}$$

写出目标函数和约束函数的梯度

$\nabla f(X)=-2(x-3)$， $\nabla g_1(X)=1$， $\nabla g_2(X)=-1$

对第一个和第二个约束条件分别引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*,γ_2^*，得 $K-T$ 点为 X^*，则有：

$$\begin{cases}-2(X^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0\\ \gamma_1^*(X^*-1)=0\\ \gamma_2^*(5-X^*)=0\\ \gamma_1^*,\gamma_2^*\geqslant 0\end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*\neq 0$，无解；

② 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*=0$，解之得 $X^*=1,\gamma_1^*=4$ 是 $K-T$ 点，目标函数值 $f(X^*)=-4$；

③ 令 $\gamma_1^*=0,\gamma_2^*\neq 0$，解之得 $X^*=5,\gamma_2^*=4$ 是 $K-T$ 点，$f(X^*)=-4$；

④ 令 $\gamma_1^*=\gamma_2^*=0$，则 $X^*=3$，是 $K-T$ 点，$f(X^*)=0$，但不是最优。

此问题不为凸规划，故极小点 1 和 5 是最优点。

(2)等同于 $\begin{cases}\min\ f(X)=(x-3)^2\\ g_1(X)=x-1\geqslant 0\\ g_2(X)=5-x\geqslant 0\end{cases}$

$\nabla f(X)=2(x-3)$， $\nabla g_1(X)=1$， $\nabla g_2(X)=-1$

引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*,γ_2^*，设 $K-T$ 点为 X^*，则有：

$$\begin{cases}2(X^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0\\ \gamma_1^*(X^*-1)=0\\ \gamma_2^*(5-X^*)=0\end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*\neq 0$，无解；

② 令 $\gamma_1^*\neq 0,\gamma_2^*=0$，则 $X^*=1,\gamma_1^*=-4$，不是 $K-T$ 点；

③ 令 $\gamma_1^*=0,\gamma_2^*\neq 0$，则 $X^*=5,\gamma_2^*=-4$，不是 $K-T$ 点；

④ 令 $\gamma_1^*=\gamma_2^*=0$，则 $X^*=3$，为 $K-T$ 点，目标函数值 $f(X^*)=(3-3)^2=0$；

由于该非线性规划问题为凸规划，故 $X^*=3$ 是全局极小点。

○7.18　试找出非线性规划问题

$$\begin{cases}\max\ f(X)=x_1\\(x_1-1)^3+x_2-2\leqslant 0\\(x_1-1)^3-x_2+2\leqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

的极大点，然后写出其 Kuhn－Tucker 条件，这个极大点满足 Kuhn－Tucker 条件吗？试加以说明。

解　这个非线性规划的 K－T 条件为：

$$\begin{cases}-1+3\gamma_1^*(x_1^*-1)^2+3\gamma_2^*(x_1^*-1)^2-\gamma_3^*=0\\\gamma_1^*-\gamma_2^*-\gamma_4^*=0\\\gamma_1^*[(x_2^*-2)+(x_1^*-1)^3]=0\\\gamma_2^*[(x_2^*-2)-(x_1^*-3)^3]=0\\\gamma_3^*x_1^*=0\\\gamma_4^*x_2^*=0\\\gamma_1^*,\gamma_2^*,\gamma_3^*,\gamma_4^*\geqslant 0\end{cases}$$

极大点是 $X=(1,2)^T$，但它不是约束条件的正则点。

◎7.19　试解二次规划

$$\begin{cases}\min\ f(X)=2x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-6x_1-3x_2\\x_1+x_2\leqslant 3\\4x_1+x_2\leqslant 9\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析　二次规划和线性规划有着直接联系，解题时将二次规划转化为线性规划求解。

解　将上述二次规划改写为

$$\begin{cases}\min\ f(X)=\dfrac{1}{2}(4x_1^2-8x_1x_2+8x_2^2)-6x_1-3x_2\\-x_1-x_2+3\geqslant 0\\-4x_1-x_2+9\geqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

可知目标函数为严格凸函数，此外

$c_1=-6$，　$c_2=-3$，　$c_{11}=4$，　$c_{22}=2$

$c_{12}=c_{21}=-4$，　$b_1=3$，　$a_{11}=-1$，　$a_{12}=-1$

$b_2=9$，　$a_{21}=-4$，　$a_{22}=-1$

由于 c_1 和 c_2 小于零，故引入的人工变量 z_1 和 z_2 前面取负号，这样得到线性规划问题如下

$$\begin{cases}\min\ g(z)=z_1+z_2\\-y_3-4y_4+y_1-4x_1+4x_2-z_1=-6\\-y_3-y_4+y_2+4x_1-4x_2-z_2=-3\\-x_1-x_2-x_3+3=0\\-4x_1-x_2-x_4+9=0\\x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2\geqslant 0\end{cases}$$

解此线性规划问题得

$$x_1^*=\frac{39}{20},\qquad x_2^*=\frac{21}{20},\qquad x_3^*=0,\qquad x_4^*=\frac{3}{20},$$

$$z_1^*=0,\qquad z_2^*=0,\qquad y_3^*=\frac{21}{5},\qquad y_4^*=0$$

$$f(X^*)=2\times\left(\frac{39}{20}\right)^2-4\times\frac{39}{20}\times\frac{21}{20}+4\times\left(\frac{21}{20}\right)^2-6\times\frac{39}{20}-3\times\frac{21}{20}=-\frac{441}{40}$$

●7.20 试用可行方向法求解

$$\begin{cases}\min\ f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2\\x_1+\ x_2\leqslant 2\\x_1+5x_2\leqslant 5\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析 本题考查的是的可行方向法。

解 等同于
$$\begin{cases}\min\ f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2\\g_1(X)=\ -(x_1+x_2)+2\geqslant 0\\g_2(X)=-(x_1+5x_2)+5\geqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

取初始可行点

$X^{(0)}=(0,0)^T$, $f(X^{(0)})=0$, $\varepsilon=0.1$

$$\nabla f(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2-4\\4x_2-2x_1-6\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(X^{(0)})=\begin{pmatrix}4\times 0-2\times 0-4\\4\times 0-2\times 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$$

$\nabla g_1(X)=(-1,-1)^T$, $\nabla g_2(X)=(-1,-5)^T$

$g_1(X^{(0)})=2>0$, $g_2(X^{(0)})=5>0$

从而

$$J(X^{(0)})=\varnothing$$

因

$$\|\nabla f(X^{(0)})\|^2=16+36=52>\varepsilon$$

故 $X^{(0)}$ 不是极小点,现取搜索方向

$$D^{(0)}=-\nabla f(X^{(0)})=(4,6)^T$$

则

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda D^{(0)}=(4\lambda,6\lambda)^{\mathrm{T}}$$

将其代入约束条件，令

$$g_1(X^{(1)})=0$$

得

$$\lambda=0.2$$

令

$$g(X^{(2)})=0$$

得

$$\lambda=\frac{5}{34}<0.2$$

$$f(X^{(1)})=32\lambda^2+72\lambda^2-48\lambda^2-16\lambda-36\lambda=56\lambda^2-52\lambda$$

由$\dfrac{\mathrm{d}f(X^{(1)})}{\mathrm{d}\lambda}=0$，即

$$56\times 2\lambda-52=0$$

得

$$\lambda=\frac{13}{28}$$

因

$$\lambda<\frac{13}{28}$$

故取

$\lambda_0=\lambda=\dfrac{5}{34}$，　　$X^{(1)}=\left(\dfrac{10}{17},\dfrac{15}{17}\right)^{\mathrm{T}}$

$f(X^{(1)})=-\dfrac{-1\ 860}{289}$，　　$\nabla f(X^{(1)})=\left(-\dfrac{58}{17},-\dfrac{62}{17}\right)^{\mathrm{T}}$

$g_1(X^{(1)})=\dfrac{9}{17}>0$，　　$g_2(X^{(1)})=0$

现构成下述线性规划问题

$$\begin{cases}\min\ \eta\\ -\dfrac{58}{17}d_1-\dfrac{62}{17}d_2\leqslant\eta\\ \quad d_1+5d_2\leqslant\eta\\ -1\leqslant d_1\leqslant 1,-1\leqslant d_2\leqslant 1\end{cases}$$

为便于用单纯形法求解，令

$y_1=d_1+1$，　　$y_2=d_2+1$，　　$y_3=-\eta$

从而有

$$\begin{cases}\min\ (-y_3)\\ \dfrac{58}{17}y_1+\dfrac{62}{17}y_2-y_3\geqslant\dfrac{120}{7}\\ y_1+\ 5y_2+y_3\leqslant 6\\ y_1\qquad\qquad\leqslant 2\\ \qquad y_2\qquad\leqslant 2\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

引入剩余变量 y_4，松弛变量 y_5，y_6 和 y_7 及人工变量 y_8，得线性规划问题

$$\begin{cases}\min\ (-y_3+y_8)\\ \dfrac{58}{17}y_1+\dfrac{62}{17}y_2-y_3-y_4+y_8=\dfrac{120}{7}\\ y_1+\ 2y_2+y_3+y_5=6\\ y_1+y_6=2\\ y_2+y_7=2\\ y_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots 8)\end{cases}$$

得最优解

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-1\\ y_2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{14}\\[2mm] \dfrac{30}{7}\end{pmatrix}$$

由此

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda D^{(1)}=\left(\frac{10}{17},\frac{15}{17}\right)^{\mathrm T}+\lambda\left(\frac{11}{14},\frac{30}{7}\right)^{\mathrm T}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}f(X^{(2)})}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

得

$$\lambda=\frac{3}{71}$$

继续循环以上步骤可得。

小结 可行方向法的定义可见课本式(7-21)。

◎7.21 试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases}\min\ f(X)=x_1^2+x_2^2\\ x_2=1\end{cases}$$

并求出当罚因子等于 1 和 10 时的近似解。

分析 使用课本中式(7—30)构造惩罚函数。

解 构造惩罚函数

$$P(x,M)=x_1^2+x_2^2+M\{\min\ (0,x_2-1)\}^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1\ \frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+2M\{\min\ (0,x_2-1)\}$$

由

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=0$$

得最优解为

$$X^*=(0,1)^{\mathrm{T}}$$

当 $M=1$ 时，$X=\left(0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

当 $M=10$ 时，$X=\left(0,\frac{10}{11}\right)^{\mathrm{T}}$

○**7.22**　试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases}\max\ f(X)=x_1\\(x_2-2)+(x_1-1)^3\leqslant 0\\(x_1-1)^3-(x_2-2)\leqslant 0\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　构造惩罚函数

$P(x,M)=x_1+M\{[\min(0,(x_2-2)+(x_1-1)^3)]^2+\min(0,(x_1-1)^3-(x_2-2))]^2\}$

$\frac{\partial P}{\partial x_1}=1+2M[\min(0,((x_2-2)+(x_1-1)^3)\cdot(3(x_1-1)^2))]+2M[\min(0,((x_1-1)^3-$

$(x_2-2))\cdot(3(x_1-1)^2)]=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2M[\min(0,(x_2-2)+(x_1-1)^3)+2M(\min(0,-(x_1-1)^3-(x_2-2)))]$

解得最优解为

$$X^*=(1,2)^{\mathrm{T}}$$

◎**7.23**　试用 SUMT 内点法求解 $\begin{cases}\min\ f(x)=(x+1)^2\\x\geqslant 0\end{cases}$

分析　使用课本中式(7-32)构造障碍函数。

解　构造障碍函数

$$\overline{P}(x,\gamma)=(x+1)^2+\frac{\gamma}{x}$$

由

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}=2(x+1)-\frac{\gamma}{x^2}=0$$

即

$$2x^2(x+1)=\gamma$$

当 $\gamma\to 0$ 时，则 $x\to 0$ 或 $x\to -1$(舍去)

故最优解为 $X^*=0,f(x^*)=(0+1)^2=1$。

○**7.24**　试用 SUMT 内点法求解

$$\begin{cases}\min\ f(x)=x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

解　构造障碍函数

$$\overline{P}(X,\gamma)=x+\frac{\gamma}{x}+\frac{\gamma}{1-x}$$

$$\frac{\partial\overline{P}(X,\gamma)}{\partial X}=1-\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\gamma}{(1-x)^2}=0$$

得最优解 $X^*=0, f(x^*)=0$。

第八章
动态规划的基本方法

内容提要

一、动态规划基本概念

1. 动态规划问题

动态规划是求多阶段决策问题最优解的一种数学方法，是一种解决问题的思路，而不是一种算法。这一点与线性规划不同。因此，在应用动态规划方法求解多阶段决策问题时，要对具体问题进行具体分析。

2. 分类

根据多阶段决策过程的时间参数是离散的还是连续的，动态规划模型可以分为离散型动态规划模型和连续型动态规划模型；根据决策过程是确定性的还是随机性的，动态规划模型又可以分为确定性动态规划模型和随机性动态规划模型。

3. 相关的概念

(1)阶段

把所给问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便能按一定的次序去求解。描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来划分，但要便于把问题的过程转化为多阶段决策的过程。

(2)状态

状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件。它描述了研究问题过程的状况，又称不可控因素。通常一个阶段有若干个状态，第一个阶段有一个状态就是点 A。第二阶段有两个状态，即点集合$\{B_1, B_2\}$。一般第 k 阶段的状态是第 k 阶段所有始点的集合。

描述过程的状态的变量称为状态变量。它可用一个数、一组数或一向量(多维情形)来描述。常用 S_k 表示第 k 阶段的状态变量。

(3)决策

决策表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定(或选择)，从而确定下一阶段的状态。这种决定称为决策，在最优控制中也称为控制。描述决策的变量，称为决策变量，它可用一个数，一组数或一向量来描述。常用 $u_k(s_k)$表示第 k 阶段当状态处于 s_k 时的决策变量。常用 $D_k(s_k)$表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合。

(4)策略

策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。由过程的第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程(或称为 k 子过程)。由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列$\{u_k(s_k),\cdots,u_n(s_n)\}$，称为 k 子过程策略，简称子策略，记为 $P_{k,n}(s_k)$，即

$$P_{k,n}(s_k)=\{u_k(s_k),u_{k+1}(s_{k+1}),\cdots,u_n(s_n)\}$$

当 $k=1$ 时，此决策函数序列称为全过程的一个策略，简称为策略记为 $P_{1,n}(s_1)$，即

$$P_{1,n}(s_1)=\{u_1(s_1),u_2(s_2),\cdots,u_n(s_n)\}$$

在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，此范围称为允许策略集合，用 P 表示。

(5)状态转移方程

① 逆序递推的基本方程

$$f_k(s_k)=\underset{u_k\in D_k(s_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$
$$(k=n,n-1,\cdots,2,1),$$

边界条件为 $f_{n+1}(s_{n+1})=0$，式中，$s_{k+1}=T_k(s_k,u_k)$。

其求解过程，根据边界条件从 $k=n$ 开始，由后向前逆推，可逐步求得各段的最优决策和相应的最优值，当最后求出 $f_1(s_1)$时，便得到整个问题的最优解，其各阶段和各变量之间的关系如图 8—1 所示。

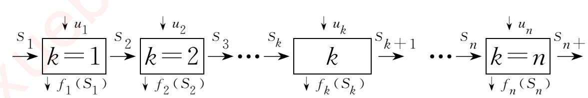

图 8—1

② 顺序递推的基本方程

$$f_k(s_{k+1})=\underset{u_k\in D_k^r(S_{k+1})}{\mathrm{opt}}\{u_k(s_{k+1},u_k)+f_{k-1}(s_k)\}$$
$$(k=1,2,\cdots,n),$$

边界条件为 $f_0(s_1)=0$;式中 $s_k=T_k^r(s_{k+1},u_k)$，即状态转移是由 s_{k+1},u_k 去确定 s_k。

其求解过程，根据边界条件从 $k=1$ 开始，由前向后顺推，可逐步求得各段的最优决策和相应的最优值，当最后求得 $f_n(s_{n+1})$时，便得到整个问题的最优解。其各阶段和各变量之间的关系如图 8—2 所示。

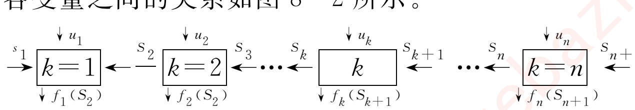

图 8—2

一般地说，当过程的始点给定时，用逆序递推比较方便;而当过程的终点给定时，用顺序递推比较方便。

(6)指标函数

指标函数是用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，它是定义在全过程和所有后部子过程上的确定的数量函数。作为动态规划模型的指标函数，应具有可分离性。

(7)最优值函数

指标函数的最优值称为最优值函数，记为 $f_k(s_k)$，它表示从第 k 阶段的状态 s_k 开始一直到过程的终止状态为止的过程，采取最优策略所得到的指标函数值。即

$$f_k(s_k)=\underset{(v_k,\cdots,u_n)}{\text{opt}}V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})$$

其中“opt”是最优化的意思，根据题意可取 min 或 max。

(8)动态规划的最优性原理

作为整个过程的最优策略具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形的状态而言，后面的决策必须构成最优策略。也就是说，一个最优策略的子策略总是最优的。

二、动态规划的求解方法

1. 基本方程

动态规划的基本方程：k 阶段与 $k+1$ 阶段之间的递推关系

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\min\limits_{u_k\in D_k(s_k)}\{d_k(s_k,u_k(s_k))+f_{k+1}(u_k(s_k))\}(k=6,5,4,3,2,1) \\ f_7(s_7)=0(\text{或写成 } f_6(s_6)=d_6(s_6,G)) \end{cases}$$

2. 基本思想

① 动态规划方法的关键在于正确写出基本的递推关系式和恰当的边界条件(简言之为基本方程)，要做到这一点，必须先将问题的过程分成几个相互联系的阶段，恰当地选取状态变量和决策变量及定义最优值函数，从而把一个大问题化成一组同类型的子问题，然后逐个求解，最后一个子问题所得的最优解，就是整个问题的最优解。

② 在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一段和未来各段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

③ 在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

如初始状态 A 已知，则按下面箭头所指的方向逐次变换有

(已知)

从而可得最优策略为$\{u_1(A),u_2(B_1),\cdots,u_6(F_2)\}$，相应的最短路线为 $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E_2\to F_2\to G$。

典型例题与解题技巧

【例 1】 写出下面问题的动态规划的基本方程：

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b \\ 0 \leqslant x_i \leqslant c_i, i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

解题分析 熟练掌握动态规划的相关概念，会写动态规划的状态转移方程。

解题过程 基本方程

$$\begin{cases}f_{n+1}(S_{n+1})=0 \\ f_k(S_k)=\max\limits_{x_k\in D_k(S_k)}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(S_{k+1})\}\end{cases}$$

$$k=n,n-1,\cdots,1$$

允许决策集合

$$D_k(S_k)=\left\{x_k \mid 0\leqslant x_k \leqslant \min\left(c_k,\frac{S_k}{a_k}\right)\right\}$$

可得状态集合

$$S_k=\{S_k \mid 0\leqslant S_k\leqslant b\} \qquad 1<k\leqslant n$$

$$S_1=b$$

状态转移函数

$$S_{k+1}=S_k-a_k x_k$$

【例 2】 某商店自生产厂家买进一批货物，由厂家至商店的可供选择的路线与运输成本如图 8－3 中所示，试求运费最低的路线。

图 8－3

解题分析 这是一道与实际相结合的题目，对综合能力要求较高。

解题过程 用 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段点 S_k 到终点 E 的运输成本。

$$d_k(s_k,u_k)=V_k(s_k,u_k)$$

表示在第 k 阶段由点 s_k 到点 $s_{k+1}=u_k(s_k)$ 的运输成本。

(1) 当 $k=4$ 时，$f_4(D_1)=20$，$f_4(D_2)=40$

(2) 当 $k=3$ 时，

$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix}d_3(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ d_3(C_1,D_2)+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=30$$

相应的决策为 $u_3(C_1)=D_1$；

$$f_3(C_2)=\min\begin{Bmatrix} d_3(C_2,D_1)+f_4(D_1) \\ d_3(C_2,D_2)+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=60$$

相应的决策为 $u_3(C_2)=D_2$；

$$f_3(C_3)=\min\begin{Bmatrix} d_3(C_3,D_1)+f_4(D_1) \\ d_3(C_3,D_2)+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=60$$

相应的决策为 $u_3(C_3)=D_1$。

当 $k=2$ 时

$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix} d_2(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d_2(B_1,C_2)+f_3(C_2) \\ d_2(B_1,C_3)+f_3(C_3) \end{Bmatrix}=110$$

相应的决策为 $u_2(B_1)=C_1, u_2(B_1)=C_2$；

$$f_2(B_2)=\min\begin{Bmatrix} d_2(B_2,C_1)+f_3(C_1) \\ d_2(B_2,C_2)+f_3(C_2) \\ d_2(B_2,C_3)+f_3(C_3) \end{Bmatrix}=70$$

相应的决策为 $u_2(B_2)=C_1$；

$$f_2(B_3)=\min\begin{Bmatrix} d_2(B_3,C_1)+f_3(C_1) \\ d_2(B_3,C_2)+f_3(C_2) \\ d_3(B_3,C_3)+f_3(C_3) \end{Bmatrix}=80$$

相应的决策为 $u_2(B_3)=C_1, u_2(B_3)=C_2$。

当 $k=1$ 时

$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix} d_1(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d_1(A,B_2)+f_2(B_2) \\ d_1(A,B_3)+f_2(B_3) \end{Bmatrix}=110$$

相应的决策为 $u_1(A)=B_2, u_1(A)=B_3$。

采用顺递的方法可以得到最优的决策序列，有三种

(1)由 $u_1(A)=B_2, u_2(B_2)=C_1, u_3(C_1)=D_1, u_4(D_1)=E$ 得到最优决策序列为 $A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$。

(2)由 $u_1(A)=B_3, u_2(B_3)=C_1, u_3(C_1)=D_1, u_4(D_1)=E$ 可得最优决策序列为 $A\to B_3\to C_1\to D_1\to E$。

(3)由 $u_1(A)=B_3, u_2(B_3)=C_2, u_3(C_2)=D_2, u_4(D_2)=E$ 可得最优决策序列为 $A\to B_3\to C_2\to D_2\to E$

采用标号法的逆序解法如图 8－4 所示，其中每节点处上方的数表示该点到终点 E 的最低运费。用直线连接的点表示该点到终点的最短路线。未用直线连接的点说明它不是该点到终点的最短路线，故这些支路均被舍去了。

图 8－4

由上图直接可以看出从 A 到 E 有三条，即三个最优决策序列：

$A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E$， $A \to B_3 \to C_1 \to D_1 \to E$， $A \to B_3 \to C_2 \to D_2 \to E$

历年考研真题评析

【题 1】 (2006 年清华大学)某奶牛站希望通过投资来扩大牛群数，开始只有 5000 元资金。现已知可购入 A 或 B 两个品种的奶牛，对 A 种牛每投入 1000 元，当年及以后每年可获得 500 元和 2 头小牛；对 B 种牛每投入 1000 元，当年及以后每年可获得 200 元和 3 头小牛。

问(1)在今后四年内应如何分配投资使奶牛群最大；

(2)到第四年奶牛站将有多少头奶牛？

解题分析 建立动态规划模型，进行求解。

解题过程 状态 s_n 为阶段 n 可利用资金；

决策 d_n 为向 A 种牛投入资金数，$s_n - d_n$ 为 B 种牛的资金；

转移函数 $s_{n-1} = 0.2s_n + 0.3dn$；

递推函数 $f_n(s_n) = r_n(d_n) + f^*_{n-1}(s_{n-1})$；

在阶段 n 出生的小牛数 $r_n = \dfrac{n}{1000}(3s_n - d_n)$。

由 $s_4 = 5000$ 可得第 4 年末牧场主拥有牛的头数为 70 头。

【题 2】 (2005 年上海交通大学)有 800 万元，分别用于 3 个项目的投资，按规定每个项目最少投资 200 万，最多投资 400 万，各项目得到不同投资时的预期效益如表 8－1 所示，要求确定使投资效益最大的各项目投资数。

表 8－1

投资额 \ 预期效益 \ 项目	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
200 万元	C_{21}	C_{22}	C_{23}
300 万元	C_{31}	C_{32}	C_{33}
400 万元	C_{41}	C_{42}	C_{43}

要求：建立动态规划模型，列出递推关系式(基本方程)，并说明方程中各符号的意义。

解题分析 熟悉动态规划建模步骤，会列递推方程。

解题过程 动态规划递推关系式为

$$f_k(x_k) = \max_{200 \leqslant u_k \leqslant 400} \{C_{ik}(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

其中　$x_{k+1}=x_k-u_k$

x_k——状态变量，为每阶段初剩余投资额；

u_k——k 阶段实际投资额；

$C_{ik}(u_k)$——k 阶段投资为 u_k 时的预期效益。

课后习题全解

○**8.1**　机器负荷分配问题。某种机器可以在高低两种不同的负荷下进行生产。在高负荷下进行生产时，产品的年产量 g 和投入生产的机器数量 u_1 的关系为：$g=g(u_1)$，这时，机器的年完好率为 a，即如果年初完好机器的数量为 u，到年终时完好的机器就为 au，$0<a<1$。在低负荷下进行生产时，产品的年产量 h 和投入生产的机器数量 u_2 的关系为：$h=h(u_2)$，相应的机器年完好率为 b，$0<b<1$。假定开始生产时完好的机器数量为 s_1，要求制定一个五年计划，在每年开始时，决定如何重新分配完好的机器在两种不同的负荷下生产的数量，使在五年内产品的总产量达到最高。

试分析本问题中：(1)阶段的划分；(2)状态变量和它的取值范围；(3)决策变量和它的允许决策集合；(4)状态转移方程；(5)指标函数和量优值函数。

解　(1)划分为五个阶段，阶段变量 $k=1,2,3,4,5$；

(2)状态变量 s_k 表示第 k 年初完好的机器数量取值范围 $a^{k-1}s_1\leqslant s_k\leqslant b^{k-1}s_1$；

(3)决策变量 $u_k(s_k)$表示第 k 年度中分配高负荷下生产的机器数量，它的允许决策集合 $D_k(s_k)=\{u_k\,|\,0\leqslant u_k\leqslant s_k\}$；

(4)状态转移方程：$s_{k+1}=au_k+b(s_k-u_k)$；

(5)指标函数 $V_{1,5}=\sum\limits_{k=1}^{5}(g(u_k)+h(s_k-u_k))$；最优值函数 $f_k(s_k)$表示 s_k 从第 k 年开始到第 5 年结束的总产量最大值，$f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant u_k\leqslant s_k}\{g(u_k)+h(s_k-u_k)+f_{k+1}[au_k+b(s_k-u_k)]\}$，$k=5,4,3,2,1$；$f_6(s_6)=0$。

○**8.2**　设某工厂自国外进口一部精密机器，由机器制造厂至出口港有三个港口可供选择，而进口港又有三个可供选择，进口后可经由两个城市到达目的地，其间的运输成本如下图中所标的数字，试求运费最低的路线。

机器制造厂⟶出口港⟶进口港⟶城市⟶某工厂

图 8—5

解 设阶段变量 $k=1,2,3,4$ 依次表示 4 个阶段选路的过程，第 1 阶段从 A 出发到 B_1、B_2 或 B_3，第 2 阶段从 B_1、B_2 或 B_3 出发到 C_1、C_2 或 C_3，第 3 阶段从 C_1、C_2 或 C_3 出发到 D_1 或 D_2，第 4 阶段从 D_1 或 D_2 出发到 E；

状态变量 s_k 表示 k 阶段初可能的位置；

决策 x_k 表示 k 阶段初可能选择的路线；

阶段指标 v_k 表示 k 阶段与所选择的路段相应的路长；

指标函数 $v_{k4}=\sum\limits_{i=k}^{4} v_i$ 表示 k 至 4 阶段的总路长；

递推公式：$f_k=\min\{v_k+f_{k+1}\}, k=4,3,2,1; f_5=0$。

表 8－2

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	$x_k{}^*$
4	D_1	E	30	30＋0	30	E
	D_2	E	40	40＋0	40	E
3	C_1	D_1	10	10＋30	40	D_1
		D_2	40	40＋40		
	C_2	D_1	60	60＋30	70	D_2
		D_2	30	30＋40		
	C_3	D_1	30	30＋30	0	D_1
		D_2	30	30＋40		
2	B_1	C_1	70	70＋40	110	C_1、C_2
		C_2	40	40＋70		
		C_3	60	60＋60		
	B_2	C_1	30	30＋40	70	C_1
		C_2	20	20＋70		
		C_3	40	40＋60		
	B_3	C_1	40	40＋40	80	C_1、C_2
		C_2	10	10＋70		
		C_3	50	50＋60		
1	A	B_1	20	20＋110	110	B_2、B_3
		B_2	40	40＋70		
		B_3	30	30＋80		

由表中计算结果可以看出，运费最低的路线为：$AB_2C_1D_1E$ 或 $AB_3C_1D_1E$ 或 $AB_3C_2D_2E$。最低运费为 110。

◎8.3　计算从 A 到 B、C 和 D 的最短路线.已知各段路线的长度如图 8－6 所示。

图 8－6

分析　本题是最短路线问题,使用动态规划逆序解法求解。

解　求从 A 到 B、C 和 D 的最短路线等价于求从 B、C 和 D 到 A 的最短路线。

设阶段变量 $k=1,2,3,4$,依次表示 4 个阶段选路的过程,第 1 阶段从 B、C 或 D 出发到 B_3、C_3 或 D_3,第 2 阶段从 B_3、C_3 或 D_3 出发到 B_2、C_2 或 D_2,第 3 阶段从 B_2、C_2 或 D_2 出发到 B_1、C_1 或 D_1,第 4 阶段从 B_1、C_1 或 D_1 出发到 A;

状态变量 s_k 表示 k 阶段初可能处的位置;

决策 x_k 表示 k 阶段初可能选择的路线;

阶段指标 v_k 表示 k 阶段与所选择的路段相应的路长;

指标函数 $v_{k4}=\sum_{i=k}^{4} v_i$ 表示 k 至 4 阶段的总路长;

递推公式:$f_k=\min\{v_k+f_{k+1}\}$,$k=4,3,2,1$;$f_5=0$。

表 8－3

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	$x_k{}^*$
4	B_1	A	3	3+0	3	A
	C_1	A	8	8+0	8	A
	D_1	A	7	7+0	7	A
3	B_2	B_1	4	4+3	7	B_1
		C_1	2	2+8		
	C_2	B_1	3	3+3	6	B_1
		C_1	8	8+8		
		D_1	7	7+7		
	D_2	C_1	4	4+8	12	C_1
		D_1	6	6+7		

k	s_k	x_k	v_k	$v_{kn}=v_k+f_{k+1}$	f_k	x_k^*
2	B_3	B_2	10	10+7	17	B_2
		C_2	13	13+6		
	C_3	B_2	12	12+7	11	C_2
		C_2	5	5+6		
		D_2	6	6+12		
	D_3	C_2	7	7+6	13	C_2
		D_2	8	8+12		
1	B	B_3	9	9+17	16	C_3
		C_3	5	5+11		
	C	B_3	10	10+17	21	C_3、D_3
		C_3	10	10+11		
		D_3	8	8+13		
	D	C_3	15	15+11	20	D_3
		D_3	7	7+13		

由表中计算结果可以看出：从 B 到 A 的最短路线为 $BC_3C_2B_1A$，最短距离为 16；从 C 到 A 的最短路线为 $CC_3C_2B_1A$ 或 $CD_3C_2B_1A$，最短距离为 21；从 D 到 A 的最短路线为 $DD_3C_2B_1A$，最短距离为 20。

从而，从 A 到 B 的最短路线为 $AB_1C_2C_3B$，最短距离为 16；从 A 到 C 的最短路线为 $AB_1C_2C_3C$ 或 $AB_1C_2D_3C$，最短距离为 21；从 A 到 D 的最短路线为 $AB_1C_2D_3D$，最短距离为 20。

◎8.4 写出下列问题的动态规划的基本方程。

(1) $\max z=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=b,(b>0)\\ x_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(2) $\min z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\geqslant b,(a_i>0)\\ x_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

分析 题(1)使用逆推解法求解，题(2)使用顺推解法求解。

解 (1)以 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段到第 n 阶段状态 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_k$ 时，使 $z=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x_i)$ 最优的值，则动态规划的基本方程为：

$$f_k(s_k)=\max_{0\leqslant x_i\leqslant s_k}\{\Phi_k(s_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\}\qquad(k=n,n-1\cdots,1)$$

$$f_n(s_n)=\max_{x_n=s_n}\Phi_n(x_n)\text{或 }f_{n+1}(s_{n+1})=0$$

状态转移方程为

$$s_{k+1}=s_k-x_k,\qquad s_1=b$$

(2)设状态变量为 $s_k(k=1,\cdots,n)$，并记

$$s_k=\sum_{i=k}^{n}a_ix_i,\qquad s_1\geqslant b$$

状态转移方程为 $S_{k+1}=S_k-a_kx_k$

决策变量为 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$

最优值函数 $f_k(s_k)$表示在 s_k 状态下从第 k 至第 n 阶段的指标函数的最小值，有

$$f_k(s_k)=\min_{0\leqslant x_k\leqslant s_ka_k}\{C_kx_k^2+f_{k+1}(s_k-a_kx_k)\}$$

$$f_{n+1}(s_n-a_nx_n)=0$$

◎8.5　用递推方法求解下列问题

(1) $\max z=4x_1+9x_2+2x_3^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(2) $\max z=4x_1+9x_2+2x_3^2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+3x_3\leqslant 10\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(3) $\max z=x_1\cdots x_n$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=c\qquad (c>0)\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

(4) $\min z=3x_1^2-5x_1+3x_2^2-3x_2+2x_3^2-7x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\geqslant 16\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(5) $\max z=3x_1^3-4x_1+2x_2^2-5x_2+2x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3\leqslant 18\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

(6) $\min z=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\qquad (p>1)$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=c\qquad (c>0)\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

分析　当初始状态给定时，使用逆推解法；当终止状态给定时，使用顺推解法。

解　(1)由题意，将问题划分为三个阶段，设状态变量为 s_0,s_1,s_2,s_3，并记 $s_3=10$，x_1,x_2，x_3 为各阶段的决策变量，各阶段指标函数按加法方式结合。

$f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k，第 1 至第 k 阶段的最大值则由约束条件可知

$$x_1=s_1,\qquad s_1+x_2=s_2,\qquad s_2+x_3s_3=10$$

即

$$s_1=x_1,\qquad 0\leqslant x_2\leqslant s_2,\qquad 0\leqslant x_3\leqslant s_3$$

由顺推法

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=s_1}(4x_1)=4s_1$$

最优解：$x_1^*=s_1$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[9x_2+f_1(s_1)]=9s_2$$

最优解：$x_2^*=s_2$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant 10}[2x_3^2+f_2(s_2)]=200$$

最优解：$x_3{}^*=10$

$$x_2^*=s_2=10-x_3^*=0$$

$$x_1{}^*=s_1=s_2-x_2^*=0-0=0$$

从而得到最优解

$$x_1^*=0,\qquad x_2^*=0,\qquad x_3^*=10$$

最优值为：200

(2)将该问题分为三个阶段，状态变量为 s_0,s_1,s_2,s_3，且 $s_3\leqslant 10$

令 x_1,x_2,x_3 为各阶段的决策变量，各阶段指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k，从第 1 至第 k 阶段的最大值，则

$$2x_1=s_1,\qquad s_1+4x_2=s_2,\qquad s_2+3x_3=s_3\leqslant 10$$

解得

$$x_1=\frac{s_1}{2},\quad 0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{4},\quad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}\quad (\text{即}\quad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{10}{3})$$

用递推法得

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=\frac{s_1}{2}}(4x_1)=2s_1$$

最优解为 $x_1^*=\dfrac{s_1}{2}$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{4}}(f_1(s_1)+4x_2)=\frac{9}{4}s_2$$

最优解为 $x_2^*=\dfrac{s_2}{4}$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}[2x_3^2+f_2(s_2)]=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}\left[2x_3^2-\frac{27}{4}x_3+\frac{9}{4}s_3\right]$$

由 $0\leqslant s_3\leqslant 10$ 以及二次函数的性质，在 $x_3^*=0,s_3=10$ 处

$$f_3(s_3)=\frac{90}{4}$$

$$x_2^*=\frac{s_2}{4}=\frac{1}{4}(s_3-3x_2^*)=\frac{1}{4}(10-0)=\frac{10}{4}$$

$$x_1^*=\frac{s_1}{2}=\frac{1}{2}(s_2-4x_2^*)=0$$

故最优解为

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = \frac{10}{4}, \qquad x_3^* = 0$$

$$\max z = 4x_1^* + 9x_2^* + 2(x_3^*)^2 = 9 \times \frac{10}{4} = \frac{90}{4}$$

(3)将该问题分为 n 个阶段，设置状态变量为 $s_0, s_1, \cdots, s_n, s_n = c$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为各阶段的决策变量.指标函数按乘法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态 s_k 从第 1 至第 k 阶段的最大值。

$$x_1 = s_1, \qquad s_1 + x_2 = s_2, \qquad s_2 + x_3 = s_3, \qquad \cdots, s_{n-1} + x_n = s_n = c$$

则

$$x_1 = s_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant s_2, 0 \leqslant x_3 \leqslant s_3, \cdots, 0 \leqslant x_n \leqslant s_n$$

用递推法可得

$$f_1(s_1) = \max_{x_1 = s_1}(x_1) = s_1$$

最优解为 $x_1^* = s_1$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}[x_2 f_1(s_1)] = \frac{s_2^2}{4} \qquad \text{（由二次函数的性质）}$$

最优解为 $x_2^* = \frac{s_2}{2}$

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3}[x_3 f_2(s_2)] = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}\left[x_3 \times \frac{s_2^2}{4}\right]$$

$$= \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3}\left[x_3 \times \frac{(s_3 - x_3)^2}{4}\right]$$

设对 x_3 的导数为 0，即

$$\frac{1}{4}[(s_3 - x_3)^2 - 2x_3(s_3 - x_3)] = 0$$

在 $x_3^* = \frac{s_3}{27}$处 $f_3(s_3) = \frac{s_3^3}{27} = \left(\frac{s_3}{3}\right)^3$

由以上可类推得 $f_k(s_k) = \left(\frac{s_k}{k}\right)^k$

则

$$f_{k+1}(s_{k+1}) = \max_{0 \leqslant x_{k+1} \leqslant s_{k+1}}[x_{k+1} f_k(s_k)] = \max_{0 \leqslant x_{k+1} \leqslant s_{k+1}}\left[x_{k+1} \times \left(\frac{s_k}{k}\right)^k\right]$$

$$= \max_{0 \leqslant x_{k+1} \leqslant s_{k+1}}\left[x_{k+1}\left(\frac{s_{k+1} - x_{k+1}}{k}\right)^k\right]$$

在 $x_{k+1}^* = \frac{s_{k+1}}{k+1}$处 $f_{k+1}(s_{k+1}) = \left(\frac{s_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$

由数学归纳可得 $f_n(s_n) = \left(\frac{s_n}{n}\right)^n = \left(\frac{c}{n}\right)^n$

最优解为 $x_n^* = \frac{c}{n}$，则

$$s_{n-1} = s_n - x_n^* = c - \frac{c}{n} = \frac{n-1}{n}C$$

$$x_{n-1}^* = \frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} \times \frac{c}{n} = \frac{c}{n}$$

依此推得

$$x_{n-2}^{*}=\frac{c}{n},\cdots,x_n^{*}=\frac{c}{n}$$

(4)原问题变形为

$$\min z=(3x_1^2-5x_1)+(3x_2^2-3x_2)+(2x_3^2-7x_3)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\geqslant 16\\ x_i\geqslant 0,i=1,2,3\end{cases}$$

$$\min z=3\left(x_1-\frac{5}{6}\right)^2+3\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^1+2\left(x_3-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2\left(x_1-\frac{5}{6}\right)+3\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+2\left(x_3-\frac{7}{4}\right)\geqslant\frac{28}{3}\\ x_i\geqslant 0,i=1,2,3\end{cases}$$

设

$$y_1=x_1-\frac{5}{6},\qquad y_2=x_2-\frac{1}{2},\qquad y_3=x_3-\frac{7}{4}$$

则原问题等价为

$$\min z=3y_1^2+3y_2^2+2y_3^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1+3y_2+2y_3\geqslant\frac{28}{3}\\ y_1+\frac{5}{6}\geqslant 0\\ y_2+\frac{1}{2}\geqslant 0\\ y_3+\frac{7}{4}\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\min z=3y_1^2+3y_2^2+2y_3^2-\frac{215}{24}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1+3y_2+2y_3\geqslant\frac{28}{3}\\ y_1\geqslant-\frac{5}{6}\\ y_2\geqslant-\frac{1}{2}\\ y_3\geqslant-\frac{7}{4}\end{cases}$$

对上述问题分为三个阶段,状态变量设为 s_0,s_1,s_2,s_3 且 $s_3\geqslant\frac{28}{3}$

y_1,y_2,y_3 为各阶段的决策变量。各阶段指标函数按加法方式结合。

最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k,从第 1 至第 k 阶段的最小值

$$2y_1=s_1,\qquad s_1+3y_2=s_2,\qquad s_2+2y_3\leqslant s_3,\qquad s_3\geqslant\frac{28}{3}$$

结合题干中的约束条件，即

$$y_1=\frac{s_1}{2},\qquad -\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3},\qquad -\frac{7}{4}\leqslant y_3=\frac{s_3}{2}$$

$$f_1(s_1)=\min_{y_1=\frac{s_1}{2}}(3y_1^2)=\frac{3s_1^2}{4}$$

最优解为
$$y_1^*=\frac{s_1}{2}$$

$$f_2(s_2)=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3}}[3y_2^2+f_1(s_1)]=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_2}{3}}\left[\frac{39}{4}y_2^2+\frac{3s_2^2}{4}-\frac{18s_2}{4}y_2\right]$$

令$\frac{39}{4}y_2^2+\frac{3}{4}s_2^2-\frac{18}{4}s_2y_2$ 对 y_2 求导为 0，即$\frac{39}{2}y_2-\frac{18}{4}s_2=0$

$$\therefore\qquad y_2=\frac{3}{13}s_2$$

故 $f_2(s_2)=\frac{3}{13}s_2^2$，最优解为 $y_2^*=\frac{3}{13}s_2$

$$f_3(s_3)=\min_{-\frac{1}{2}\leqslant y_2\leqslant\frac{s_3}{3}}\left[2y_3^2+\frac{3(s_3-2y_3)^2}{13}\right]$$

由求驻点法可得

$$f_3(s_3)=\frac{3}{19}s_3^2$$

最优解为
$$y_3^*=\frac{3}{19}s_3$$

又

$$\because s_3\geqslant\frac{28}{3}$$

$$\therefore f_3(s_3)\geqslant\frac{3}{19}\times\left(\frac{28}{3}\right)^2$$

而

$$\min z=\min\left\{f_3(s_3)-\frac{215}{24}\right\}=\frac{729}{152}$$

反推得到最优解为

$$x_1^*=\frac{69}{38},\qquad x_2^*=\frac{5}{38},\qquad x_3^*=\frac{245}{76}$$

(5)将问题分为 3 个阶段，状态变量为 $s_0,s_1,s_2,s_3,s_3\leqslant18$。$x_1,x_2,x_3$ 为各阶段的决策变量，各阶段指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$表示第 k 阶段结束状态为 s_k，第 1 至第 k 阶段的最大值。

$$4x_1=s_1,\qquad s_1+2x_2=s_2,\qquad s_2+3x_3=s_3\leqslant18$$

则

$$x_1=\frac{s_1}{4},\qquad 0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{2},\qquad 0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}$$

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=\frac{s_1}{4}}[3x_1^3-4x_1]=\frac{3}{64}s_1^3-s_1$$

最优解 $x_1^*=\frac{s_1}{4}$

$$f_2(s_2)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant\frac{s_2}{2}}[2x_2^2-5x_2+f_1(s_1)]=\frac{3s_2^3}{64}-s_2$$

最优解为 $x_2^*=0$

$$f_3(s_3)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}[2x_3+f_2(s_2)]=\max_{0\leqslant x_3\leqslant\frac{s_3}{3}}\left[2x_3+\frac{3s_2^3}{64}-s_2\right]=\frac{3}{64}s_3^2-s_3$$

最优解为 $x_3^*=0$

$$\max z=\max\{f_3(s_3)\}$$

$$s_2=s_3-3x_3^*=18-0=18,s_1=s_2-2x_2^*=18-2\times0=18,$$

$$x_1^*=\frac{s_1}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

最优解为 $x_1^*=\frac{9}{2},x_2^*=0,x_3^*=0$

(6)划分 n 个阶段,状态变量为 $s_0,s_1,\cdots,s_n,s_n=c$。$x_1,\cdots,x_n$ 为各阶段决策变量。其指标函数按加法方式结合。最优值函数 $f_k(s_k)$为第 k 阶段结束状态为 s_k,第 1 至第 k 阶段的最小值。

$$s_1=x_1,\qquad s_1+x_2=s_2,\qquad \cdots,\qquad s_{n-1}+x_n=s_n=c$$

则

$$x_1=s_1,\qquad 0\leqslant x_2\leqslant s_2,\qquad \cdots,\qquad 0\leqslant x_n\leqslant s_n,$$

$$f_1(s_1)=\min_{x_1=s_1}(x_1^p)=s_1^p$$

最优解为 $x_1^*=s_1$

$$f_2(s_2)=\min_{0\leqslant x_2\leqslant s_2}[x_2^p+f_1(s_1)]=2\cdot\left(\frac{s_2}{2}\right)^p$$

最优解为 $x_2^*=\frac{s^2}{2}$

依此类推

$$f_n(s_n)=n\cdot\left(\frac{s_n}{n}\right)^p$$

最优解为 $x_n^*=\frac{s_n}{n}$

$$s_{n-1}=s_n-x_n^*=s_n-\frac{s_n}{n}=\frac{n-1}{n}s_n$$

$$x_n^*-1=\frac{1}{n-1}s_{n-1}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}s_n=\frac{1}{n}s_n$$

依此类推

$$x_1^*=\frac{1}{n}s_n$$

而 $x_1^*+\cdots+x_n^*=C$

$$\therefore s_n=C$$

最优解为 $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = \dfrac{c}{n}$

$$\min z = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot c\right)^p = \frac{c^p}{n^{p-1}}$$

●**8.6** 设某人有 400 万元金额，计划在四年内全部用于投资中去。已知在一年内若投资用去 x 万元就能获得$\sqrt{x}$万元的效用。每年没有用掉的金额，连同利息(年利息 10%)可再用于下一年的投资，而每年已打算用于投资的金额不计利息。试制定金额的使用计划，而使四年内获得的总效用最大？

(1)用动态规划方法求解；(2)用拉格朗日乘数法求解；(3)比较两种解法，并说明动态规划方法有哪些优点。

分析　按要求求解后根据两者的过程比较。

解　(1)用动态规划方法解。

设置阶段：按年份分为 4 阶段，则 $k=1,2,3,4$；

状态变量 s_k：第 k 年年初的可供投资的金额；

决策变量 x_k：第 k 年实际用于投资的金额；

状态转移方程：$s_{k+1} = 1.1(s_k - x_k)$；

允许决策集合：$p_k(s_k) = \left\{\dfrac{x_k}{0} \leqslant x_k \leqslant s_k\right\}$；

最优值函数 $f_k(s_k)$：以数量 s_k 可供投资的金额投资于第 k 年至第 4 年末所得到的最大效用。

该问题的逆序关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k} \{\sqrt{x_k} + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0 \qquad k = 4,3,2,1 \end{cases}$$

当 $k=4$ 时

$$f_4(s_4) = \max_{0 \leqslant x_4 \leqslant s_4} \{\sqrt{x_4}\} = \sqrt{s_4}$$

最优解为 $x_4^* = s_4$

当 $k=3$ 时

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3} \{\sqrt{x_3} + f_4(s_4)\}$$

$$= \sqrt{2.1 s_3} \qquad (\text{令关于 } x_3 \text{ 的一阶导数为 } 0)$$

相应的最优解为 $x_3^* = \dfrac{1}{2.1} s_3$

当 $k=2$ 时

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2} \{\sqrt{x_2} + f_3(s_3)\}$$

$$= \sqrt{3.31 s_2} \qquad (\text{由关于 } x_2 \text{ 的一阶导数为 } 0 \text{ 可求得})$$

相应的最优解为 $x_2^* = \dfrac{1}{3.31} s_2$

当 $k=2$ 时

$$f_1(s_1)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant s_1}\{\sqrt{x_1}+f_2(s_2)\}$$
$$=\sqrt{4.461s_1}\quad(\text{由关于 } x_1 \text{ 的一阶导数为 0 可求得})$$

相应的最优解为 $x_1^*=\dfrac{s_1}{4.461}$

而 $s_1=400$

故 4 年内的最大效用为

$$f_1(400)=\sqrt{4.461\times400}=43(\text{万元})$$

返推可得最优解为

$$x_1^*=\frac{s_1}{4.461}=\frac{400}{4.461}=86(\text{万元}),$$

$$x_2^*=\frac{1}{3.31}s_2=104(\text{万元}),$$

$$x_3^*=\frac{1}{2.1}s_3=\frac{1}{2.1}\times1.1\times(s_2-x_2^*)=126(\text{万元}),$$

$$x_4^*=s_4=1.1(s_3-x_3^*)=153(\text{万元})。$$

(2)用拉格朗日乘数法解。

第 i 年($i=1,2,3,4$)用于投资的金额为 x_i 万元,获得效用为 $\sqrt{x_i}$ 万元,没有用掉的金额为 y_i 万元,其中 $y_4=0$,则

$$\max z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+y_1=400\\x_2+y_2=1.1y_1\\x_3+y_3=1.1y_2\\x_4=1.1y_3\\x_i\geqslant0,i=1,2,3,4\\y_j\geqslant0,j=1,2,3\end{cases}$$

拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(x_i,y_j,\lambda_i)=&(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\\&+\lambda_1(x_1+y_1-400)+\lambda_2(x_2+y_2-1.1y_1)\\&+\lambda_3(x_3+y_3-1.1y_2)+\lambda_4(x_4-1.1y_3)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i\geqslant0\quad(i=1,2,3,4)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_i}}+\lambda_i=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y_1}=\lambda_1-1.1\lambda_2=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y_2}=\lambda_2-1.1\lambda_3=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y_3}=\lambda_3-1.1\lambda_4=0\end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{1}{4x_i^2} \\ \lambda_1 = 1.1\lambda_2 \\ \lambda_2 = 1.1\lambda_3 \\ \lambda_3 = 1.1\lambda_4 \end{cases}$$

则

$$x_i = \frac{1}{4\lambda_i^2}, \quad \lambda_3 = 1.1\lambda_4, \lambda_2 = 1.21\lambda_4, \quad \lambda_1 = (1.1)^3\lambda,$$

$$x_4 = \frac{1}{4x_4^2}, \quad x_3 = \frac{1}{4\lambda_3^2} = \frac{1}{4\times 1.1^2\lambda_4^2}, \quad x_2 = \frac{1}{4\lambda_2^2} = \frac{1}{4\times 1.21^2\lambda_4^2},$$

$$x_1 = \frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{4\times 1.331^2\lambda_4^2},$$

$$y_3 = \frac{1}{1.1}x_4 = \frac{1}{4\times 1.1}\frac{1}{\lambda_4^2}, \quad y_2 = \frac{1}{1.1}\left[\frac{1}{4\times 1.21} + \frac{1}{4\times 1.1}\right]\frac{1}{\lambda_4^2},$$

$$y_1 = \frac{1}{1.1}[x_2 + y_2] = \frac{1}{1.1}\left[\frac{1}{4\times 1.21^2} + \frac{1}{1.1}\left(\frac{1}{4\times 1.21} + \frac{1}{4\times 1.1}\right)\right]\frac{1}{\lambda_4^2}$$

由 $x_1 + y_1 = 400$ 得

$x_1 = 86$(万元)，$x_2 = 104$(万元)，$x_3 = 126$(万元)，$x_4 = 153$(万元)。

即为所求最优解。

(3)两种方法所得结果相吻合，用动态规划方法求解有以下的优点：

① 易于确定全局最优解；

② 能得到一族解，便于分析结果，这里得到的不仅是全过程的解，而且包含所有子过程的一族解。

小结　动态规划还有一条优点：能利用经验，提高求解的效率。虽然它也存在不足之处，但其应用是广泛的。